

Analysis III

Prof. Mertins

WS 1995/96

Wilko Hein

Kapitel XI. Wegintegrale

§47 Wege und Weglängen

47.1 Definition

Weg, Bogen, Parameterdarstellung, Parameter. Bogen immer kompakt. Anfangs- und Endpunkt. Weg Injektiv: **JORDAN-Weg**. Durchlaufsin, Orientierung (Parameter wachsend). Inverser Weg.

47.2 Beispiele

47.3 Definition

Summe der Wege und Bögen, Weglänge (nach EUKLID-Norm)

47.4 Definition

Rektifizierbar (Für alle Zerlegungen bleibt approximierete Länge beschränkt). Länge vom Weg: Supremum.

47.5 Definition

Länge des eingeschränkten Weges, Weglängenfunktion $s(t)$. C^1 -Weg

47.6 Satz

C^1 -Weg ist rektifizierbar, Weglängenfunktion C^1 , $s'(t) = |\gamma'(t)|$, $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
 $s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| du$.

Beweis: $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \Rightarrow L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Abschätzung
 $|\gamma(t+h) - \gamma(t)|/h \leq (s(t+h) - s(t))/h \leq 1/h \cdot \int_t^{t+h} |\gamma'(u)| du$, Seiten gegen $|\gamma'(t)|$. Analog linkss. Abl.

47.7 Beispiele

Weg in Polarkoordinaten. $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f(\varphi))^2 + f'(\varphi)^2} d\varphi$

47.8 Definition

Weg glatt ($\gamma' \neq 0$). Tangentialvektor von γ im Punkt $\gamma(t)$: $\gamma'(t)$
 Stückweiser C^1 -Weg: Endliche Summe von C^1 -Wegen.

47.9 Satz

Stückweiser C^1 -Weg rektifizierbar und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$.

§48 Bögenlänge

..... **Frage: Länge des Bogens Γ .**

Probleme: (1) Weg kann Bogen mehrfach durchlaufen. Nimm JORDAN.

(2) Weiterer JORDAN-Weg: Gleiche Länge?

48.1 Definition

JORDAN-Bogen: Auch Bogen eines JORDAN-Weges. γ_0 dann **JORDAN-Darstellung**.

48.2 Hilfssatz

h stetig und injektiv \Rightarrow streng monoton

48.3 Hilfssatz

γ JORDAN-Weg. $\Rightarrow \gamma^{-1} : \Gamma \rightarrow [a, b]$ stetig.

48.4 Satz

Intervalländerung durch stetige, streng monotone und surjektive Fkt.

Bedeutung: Aus einer JORDAN-Darstellung *alle* Darstellungen ermittelbar.

48.5 Satz

Bei Intervalländerung bleibt Rektifizierbarkeit und Bogenlänge erhalten.

48.6 Definition

JORDAN-Bogen rektifizierbar, wenn es rektifizierbare JORDAN-Darstellung gibt. $L(\Gamma)=L(\gamma)$ Bogenlänge von Γ .

Weglänge: Länge ist Funktion zugeordnet

Bogenlänge: Länge ist Punktmenge zugeordnet, unabhängig von gewählter JORDAN-Darstellung.

48.7 Definition und Satz

JORDAN-Kurve: γ auf $[a,b]$ injektiv und $\gamma(a)=\gamma(b)$. Γ „einfach geschlossen ohne Doppelpunkte“

48.8 Beispiele

Länge von Teilbogen des Einheitskreises. => Winkelfunktion stimmt mit elementargeometrischer Definition überein!

48.9 Darstellung mit Bogenlänge als Parameter

JORDAN-Bogen => Weglängenfunktion s stetig. => $\gamma_2: [0, L(\Gamma)] \rightarrow \gamma(s^{-1}(s))$ Darstellung von Γ mit Bogenlänge als Parameter

$|d\gamma_2(s)/ds| = 1$ (Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion) => **Tangentialeinheitsvektor**

48.10 Beispiel

§49 Wegintegrale

..... Punkt P bewegt sich im Kraftfeld. Welche Arbeit wird verrichtet?

Zerlegung. Komponente des Kraftvektors in Wegrichtung: $f(\gamma(\tau_k)) \cdot$ Tangentialeinheitsvektor
 Arbeit: ... \cdot Länge der Zerlegungsstrecke. Kürzen!

$$A = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

49.1 Definition

Wegintegral von f längs γ : $\int_{\gamma} f(x)dx := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt$
 $\int_{\gamma} g dx_j := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt$. f Vektorfeld, g reellwertig

49.2 Satz

Zwei glatte Wege mit demselben JORDAN-Bogen und gleichem Startpunkt gleiches Wegint.

49.3 Beispiele

49.4 Definition

Wegintegral von g (Skalarfeld) längs γ bezüglich der **Weglänge:** $\int_{\gamma} g ds := \int_a^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$
 Spezialfall $g=1$: Weglänge

49.5 Satz

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma^{-1}}, \quad \left| \int_{\gamma} \right| \leq (\max |f(x)|) \cdot L(\gamma)$$

49.6 Bemerkung

$\int_{\gamma} f(x)dx = \int_{\gamma} f \cdot \gamma'(t)/|\gamma'(t)| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} f \cdot \hat{t} ds$, \hat{t} Tangentialeinheitsvektor, Skalarprodukt, Komponente des Vektorfeldes in Richtung der Tangente.

§50 Gradientenfelder

50.1 Definition

Wegunabhängigkeit vom Wegintegral: Für je zwei Punkte hat Wegintegral für jeden ganz im Feld verlaufenden stückweisen C^1 -Weg denselben Wert. $\int_{\gamma} f \cdot dx = \int_a^b f \cdot dx$

50.2 Definition

Gradientenfeld: Gibt Skalarfeld $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \text{grad } \varphi(x)$, x aus S . φ heißt Stammfunktion von f . $U = -\varphi$ Potential des Vektorfeldes. *Alle* Stammfkt. durch Addition von Konstante.

50.3 Beispiel

NEWTONSche Potential, Gravitationsfeld.

50.4 Hauptsatz für Wegintegrale



(a) $f: \text{Gebiet } G \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetiges Gradientenfeld. $f = \text{grad } \varphi \Rightarrow \int f \cdot dx$ wegunabhängig. $\int_a^b f \cdot dx = \varphi(b) - \varphi(a)$, $a, b \in G$
 (b) f stetiges Vektorfeld mit wegunabhängigem Wegintegral.

Dann f Gradientenfeld und für festes a ist C^1 -Fkt. $\varphi(x) = \int_a^x f \cdot dz$ Stammfunktion
 Verallgemeinerung der Hauptsätze für Integralrechnung 30.6, 28.9!

Beweis: (a) $\Phi(t) = (\varphi \circ \gamma)(t)$, $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Kettenregel.

(b) Inkrementbetrachtung, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ und $f(x) \cdot h$ durch Wegintegral $\gamma: [0, 1] \rightarrow [x, x+h]$.

50.5 Satz

Ansage!

Wegintegral wegunabhängig

\Leftrightarrow Für jeden geschlossenen stückweisen C^1 -Weg ist $\int_{\gamma} f \cdot dx = 0$ ($\gamma(a) = \gamma(b)$)

Beweis: \Rightarrow : $f = \text{grad } \varphi \Rightarrow \int f \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0$. \Leftarrow : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$,

Auseinanderziehen

50.6 Satz (Parameterintegrale)

$g(x) := \int_a^b f(x, t) dt$

(a) $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

(b) Ex. D_j und ist stetig, dann ist g stetig partiell nach x_j diffbar mit $D_j g(x) = \int_a^b D_j f(x, t) dt$

50.7 Satz (Integrabilitätsbedingung)

Ansage!

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^p$ C^1 -Vektorfeld, G offen

(a) f Gradientenfeld $\Rightarrow f'(x)$ (JACOBI-Matrix) symmetrisch, d.h. $D_k f_j = D_j f_k$.

Auf G gilt die Integrabilitätsbedingung.

(b) G konvex oder sternförmig \Rightarrow Auch Umkehrung gilt.

Beweis: (a) $f = \text{grad } \varphi \Rightarrow f_j = D_j \varphi \Rightarrow D_k f_j = D_k D_j \varphi = D_j D_k \varphi = D_j f_k$ Schwarz 38.4, $f \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^2$.

(b) Konstruktiver Beweis. ---

50.8 Spezialfall \mathbb{R}^3

G konvexes Gebiet, $f = (f_1, f_2, f_3)$ C^1 -Vektorfeld.

f Gradientenfeld $\Leftrightarrow D_2 f_3 = D_3 f_2, D_3 f_1 = D_1 f_3, D_1 f_2 = D_2 f_1 \Leftrightarrow \text{rot } f = 0$ auf G

Auf konvexem Gebiet des \mathbb{R}^3 genau die wirbelfreien Vektorfelder Gradientenfelder

50.9 Definition

rot: S (offene Menge des \mathbb{R}^3) $\rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } f := (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$ Rotation

Kreuzprodukt aus (D_1, D_2, D_3) und (f_1, f_2, f_3) . f partiell diffbares Vektorfeld.

f wirbelfrei $\Leftrightarrow \text{rot } f = 0$ auf S

50.10 Beispiele

Rotierende Flüssigkeit. Nicht wirbelfrei

Kapitel XII

§51 *L*-Integral über Intervalle im \mathbb{R}^p

51.1 Definition

p -dimensionales Intervall $I := J_1 \times J_2 \times \dots \times J_p$
 Inneres, Abschluß, Inhalt,
 Zerlegung, $|I| = \sum |T_k|$, Verfeinerung, $|Z| = \max |Z_j|$ Feinheitsmaß
 Gemeinsame Verfeinerung (Zerlegungen vereinigen)

51.2 Definition

Nullmenge, Menge vom Maß 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gibt es abzählbar viele überdeckende Intervalle, deren gemeinsamer Inhalt $< \varepsilon$ bleibt.

51.3 Satz

Teilmenge von Nullmenge und Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder NM.

51.4 Definition

Treppenfunktion. $T(I)$ Linearer Raum

51.5 Definition

$\int_I \varphi(x) dx = \sum \varphi(T_k) \cdot |T_k|$ mit I beschränktem Intervall

51.6 Satz

Linearität und Ordnungserhaltung des Integrals.

..... Analogon zu §27

$\int_I = 0$, wenn $\varphi_n \rightarrow 0$ f.ü.

$\varphi_n(t)$ monoton wachsend, beschränkte Integralfolge $(\int_I \varphi_n(x) dx)_n \Rightarrow (\varphi_n)$ konv. f.ü.

$L^+(I) :=$ Menge aller Fkt., mit φ_n monoton wachsend gegen f , Integralfolge beschränkt

$\Rightarrow \int_I f(x) dx := \lim \int_I \varphi_n(x) dx$ das L -Integral von f über I . Wohldefiniert!

$L(I)$: $f=g-h$, g, h aus $L^+(I)$.

Es gelten: Linearität, Ordnungserhaltung, $f=g-h$ mit $\int_I h dx < \varepsilon$, BEPPO LEVI, KONVERGENZSATZ VON LEBESGUE (Majorisierte Konvergenz), kleiner LEBESGUE, Lemma von FATOU, RIEMANN-Theorie, Meßbarkeit, L^r -Theorie ($= \{ f \in M(I), |f|^r \in L(I) \}$), $(L^r(I), \|\cdot\|_r)$ BANACH-Raum, bei $r=2$ HILBERT-Raum);

Keine Stammfunktionen und **kein** Hauptsatz.

§52 Satz von FUBINI

52.1 Hilfssatz

Gibt wachsende Folge von Treppenfunktionen, Integralfolge beschränkt, aber auf Nullmenge divergent.

52.2 Hilfssatz

N Nullmenge im \mathbb{R}^{p+q} . „Schnitt“ $S(y) = \{ x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in N \}$ für fast alle y Nullmenge

52.3 Satz von FUBINI

$I_x \subset \mathbb{R}^p$, $I_y \subset \mathbb{R}^q$. $I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{p+q}$. $f \in L(I)$.

(i) Für fast alle $y \in I_y$ ist Fkt. $x \rightarrow f(x, y)$ in $L(I_x)$

(ii) $y \rightarrow g(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx \in L(I_y)$ und $\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} (\int_{I_x} f(x, y) dx) dy$

52.4 Satz (Vertauschen der Integrationsreihenfolge)

$\int_{I_y} (\int_{I_x} f(x, y) dx) dy = \int_{I_x} (\int_{I_y} f(x, y) dy) dx$



52.5 Folgerung

Integral in \mathbb{R}^p durch wiederholte Integration in \mathbb{R} .

52.6 Beispiele

52.7 Satz von TONELLI (entspr. CAUCHYSchem Doppelreihensatz)



Ex. ein iteriertes Integral $\int_{I_x} \int_{I_y} |f(x,y)| dy dx$ oder $\int_{I_y} \int_{I_x} |f(x,y)| dx dy$, mit $f \in M(I)$, dann auch

$$\int_{I_x} \int_{I_y} f(x,y) dy dx = \int_{I_y} \int_{I_x} f(x,y) dx dy = \int_I f(x,y) d(x,y). \text{ **Beträge beachten!**}$$

Beweis: $I_n := I \cap [-n, n]$. $g_n := \min(|f|, n \cdot \chi_{I_n}) \rightarrow |f|$ auf I von unten. $|g_n| \leq n \cdot \chi_{I_n} \in L(I)$. $\Rightarrow g_n \in L(I)$.

$$\int_{I_n} g_n d(x,y) = \int_{I_x} \int_{I_y} g_n dy dx \leq \int_{I_x} \int_{I_y} |f(x,y)| dy dx. \Rightarrow |f| \in L(I) \text{ nach BEPPO LEVI.}$$

§53 Integration über meßbare Mengen

52.1 Definition

Menge (LEBESGUE-) meßbar, wenn charakteristische Fkt. χ_A meßbar (Grenzw. v. Treppenf.)

(p-dimensionales) (LEBESGUESches) Maß: $\int_{\mathbb{R}^p} \chi_A(x) dx$ oder Unendlich

53.2 Beispiele

Nullmenge, beschränktes Intervall

53.3 Satz

Vereinigung, Schnitt, Verminderung erhalten Meßbarkeit (Meßbare Mengen: Ring!)

Mengenschachtelung, dann Vereinigung abzählbar (unendlich) vieler Mengen meßbar.

\Rightarrow Maß abzählbar additiv

53.4 Beispiele

Jede offene, abgeschlossene, kompakte Menge meßbar

Beweis: Vereinigung aus kompakten Würfeln, Inneres paarw. disjunkt

53.5 Definition

Triviale Fortsetzung (0 außerhalb des Definitionsbereiches)

$$f_A \in L(\mathbb{R}^p) \Rightarrow \int_A f dx := \int_{\mathbb{R}^p} f_A dx, \text{ f heißt L-Integrierbar auf A}$$

53.6 Beispiele

53.7 Satz

§28 und §29 und §34 gelten weiter.

53.8 Satz (Bereichsadditivität)

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_B f dx + \int_A f dx - \int_{A \cap B} f dx$$

53.9 Beispiele (Integration über Normalbereiche)

Normalbereich bzgl. der x-Achse: $B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$

Normalbereich bzgl. der y-Achse: $B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$

Normalbereich bzgl. der x-y-Ebene: $B := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: (x,y) \in K, b, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y) \}$

K kompakt. $\varphi_1 < \varphi_2$ stetig.

Dabei: $\int_B f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx$. Zu zeigen über triviale Fortsetzung auf \mathbb{R}^2 .

..... Prinzip von CAVALIERI



In Hyperebenen schneiden, einzeln integrieren.

§54 Substitutionsregel

Vorüberlegungen Zur Berechnung von Bereichsintegralen

z.B. Abbilden einer achsparallelen Zerlegung in krummlinige Zerlegung mithilfe von g

bijektiv. => Parallelogramme mit Flächeninhalt $F = |a \times b| = |\det a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2|$
 $= |\det D_1\varphi(u_j, v_k) \ D_2\varphi(u_j, v_k) \ D_1\psi(u_j, v_k) \ D_2\psi(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \cdot \Delta v_k = |\det g'(u_j, v_k)| \Delta u_j \Delta v_k$

- 54.1 **Satz (Substitutionsregel)**

$g \in C^1(U \subset \mathbb{R}^p \text{ offen}, \mathbb{R}^p)$, injektiv, $\det g' \neq 0$ (damit g^{-1} dito).
 Dann $f \in L(g(U)) \Leftrightarrow (f \circ g) |\det g'| \in L(U)$.
 $\int_{g(U)} f(x) dx = \int_U f(g(t)) |\det g'| dt$. Beachte: $\int_{g(U)}!$ Ohne Beweis.
- 54.2 **Folgerung**

Bewegungsinvarianz des L-Maßes bei Verschiebung, Drehung, Spiegelung ($\det = \pm 1$)
 $\lambda(g(M)) = |\det A| \lambda(M)$
- 54.3 **Bemerkung**

Substitution auch auf kompakten Mengen, betrachte triviale Fortsetzung
 Für $p=1$ normale Substitutionsregel: Zwei Fälle: g monoton wachsend / fallend.
 Bei Determinante Betrag, hebt sich mit Endpunktvertauschung auf!
- 54.4 **Anwendung auf Polarkoordinaten**

$g: (r, \varphi) \rightarrow g(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. $|\det g'| = |r|$
 Polarkoordinaten kartesisch interpretiert.
 $\int_{g(U)} f(x, y) d(x, y) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr$
- 54.5 **Anwendung auf Zylinderkoordinaten**

$g: (r, \varphi, z) \rightarrow g(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$. $\det g' = r$
- 54.6 **Anwendung auf Kugelkoordinaten**

$g: (r, \vartheta, \varphi) \rightarrow g(r, \vartheta, \varphi) := (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$, $\det g' = r^2 \sin \vartheta$
 $0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < \pi$
- **Beispiele**

Schwerpunkt: $(x_0, y_0, z_0) = 1/\lambda(B) * (\int_B x d(x, y, z) + \int_B y d(x, y, z) + \int_B z d(x, y, z))$
- 54.7 **Volumen einer Pyramide**

Kapitel XIII. Integralsätze

§55 Integralsatz von GAUSS in der Ebene

..... $B \subset \mathbb{R}^2, C^1$ -Normalbereich bzgl. x -Achse, d.h. $\varphi_1 \leq \varphi_2$ stückweise stetig diffbar.
 $\partial B = \text{Rand} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ positiv orientiert, γ umrandetes Gebiet innen, rektifizierbar; $G \in \mathbb{R}^2$ offen, $B \subset G$, $P: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig; existiere $D_2 P$ auf G stetig.
 Dann: $\int_B D_2 P(x, y) d(x, y) = - \int_{\partial B} P dx = - \int_c^d P(\gamma(t)) \cdot x'(t) dt$. $x'(t)$ höchstens an endlich vielen Stellen nicht definiert, dort := 0 => $(P \circ \gamma) \in L(c, d)$. (dx entspricht hier $dx_1!$ dy entfällt, da Integrale über die Seitenwege = 0)
Gebietsintegral über Partielle Ableitung durch Wegintegral auf Rand über P .
 Beweis: $\int_B D_1 P(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} D_2 P(x, y) dy dx = \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx$
 $\int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = \int_a^b P(\gamma_1(t)) dt = \int_{\gamma_1} P dx$. Analog $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ im Integral = 0. Summe => Beh.

- 55.1 **Integralsatz von GAUSS im \mathbb{R}^2**

$B \subset \mathbb{R}^2$ C^1 -Normalbereich bzgl. x - und y -Achse. ∂B positiv orientierter Rand.
 $B \subset G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $P, Q: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ex. $D_2 P, D_1 Q$ auf G und dort stetig.

$$\int_B (D_1 Q - D_2 P) d(x,y) = \int_{\partial B} P dx + Q dy$$

Berechnung von Wegintegralen durch Gebietsintegrale und umgekehrt.

55.2 Folgerung

$$\lambda_2(B) = 1/2 \cdot \int_{\partial B} x dy - y dx$$

Beweis: Setze $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$

55.3 Beispiel

Flächeninhalt einer Kreisscheibe

55.4 Umformung des GAUSSSchen Satzes

JORDAN-Kurve ∂B stückweise glatte Darstellung: $\gamma(t)=(x(t), y(t))$

$n=n(t) := 1/|\gamma'(t)| \cdot (y'(t), -x'(t))$ äußerer Normaleneinheitsvektor längs γ .

$f=(f_1, f_2)$ C^1 -Vektorfeld $G \rightarrow R^2$.

Skalarfeld „Divergenz f^* “: $\text{div } f := D_1 f_1 + D_2 f_2$

$$\int_B \text{div } f d(x,y) = \int_{\gamma} f \cdot n ds$$

Beweis: Setze $P:=-f_2$, $Q=f_1$



55.5 Anwendung (Partielle Integration)

$f = (g, h, 0)$. $\text{div } f = (D_1 g) h + g (D_1 h)$.

$$\int_B (D_1 g) h d(x,y) = \int_B (D_1 g) h d(x,y) + \int_{\partial B} n_1 g h ds, \quad n = (n_1, n_2) \text{ Normaleneinheitsvektor}$$

55.6 Bemerkung

Integralsatz gilt auch in allgemeineren Bereichen. In endlich viele C^1 -Normalbereiche aufteilen. Einige Wegintegrale heben sich auf!

55.7 Anschauliche Deutung der Divergenz

a) $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} g d(x,y) / \lambda(B_r) = g(x,y)$ bei B_r Kreisscheibe vom Radius r .

b) f : stetiges Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung. Welche Flüssigkeitsmenge tritt aus/ein? Ausfluß = $f \cdot n \Delta s$. Ausfluß aus $B = \int_{\partial B} f \cdot n ds = \int_B \text{div } f d(x,y)$. >0 bei Quellen, <0 bei Senken. $\int_{\partial B} f \cdot n ds / \lambda(B) =$ Mittlere Ergiebigkeit des Bereiches B .

$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B} f \cdot n ds / \lambda(B_r) = (a) = \text{div } f(x,y) =$ Quelldichte, **spezifische Ergiebigkeit**

§56 Flächen- und Oberflächenintegrale in R^3

56.1 Definition

$K \in R^2$ kompakt, damit meßbar. $K \subset M \subset R^2$ offen.

$\Phi: (u,v) \rightarrow \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \in R^3$ sei C^1 -Funktion.

Φ_K (Einschränkung auf K) **Fläche** Φ mit Parameterbereich K .

Bildmenge $F := \Phi(K)$ ist **Flächenstück**, $\Phi(\partial K)$ **Berandung** von F

Beachte: M Hilfsmenge, da C^1 -Fkt. nur auf offenen Mengen definiert!

Fläche / Flächenstück \Leftrightarrow Weg / Bogen

Definiere $d\Phi/du := (dX/du, dY/du, dZ/du)$, $d\Phi/dv=...$, jeweils an Stelle (u,v) .

$N := d\Phi/du(u,v) \times d\Phi/dv(u,v) \in R^3$ **Normalenvektor** der Fläche Φ im Punkt $\Phi(u,v)$

56.2 Bemerkungen

$N(u,v) = (d(Y,Z) / d(u,v), d(X,Z) / d(u,v), d(X,Y) / d(u,v))$

Funktionaldeterminante, $J_{\text{JACOBI}}: \det J_f(x) = \det f'(x) = d(f_1, \dots, f_p) / d(x_1, \dots, x_p)$

$(\Phi \circ \gamma)$ Weg auf Flächenstück. Tangentialvektor nach Kettenregel! Ist LinKombi der Richtungsableitungen der Fläche, damit senkrecht zu N .

Parameterlinien: Weg mit einer Komponente fest.

56.3 Beispiele

Beachte: Halbkugel so nicht als Fläche darstellbar; offenes M fehlt!

Niveau-Fläche, implizit durch $F(x_0, y_0, z_0) = 0, D_3 F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
 Dann ex. Umgebung mit Fkt. $f, F(x, y, f(x, y)) = 0. N(u, v) \parallel \text{grad } F(u, v, f(u, v))$

56.4 Definition

Flächeninhalt $I(\Phi) := \int_K |N(u, v)| d(u, v)$
 $|N(u, v)| = \sqrt{(\partial(Y, Z) / \partial(u, v))^2 + (\partial(X, Z) / \partial(u, v))^2 + (\partial(X, Y) / \partial(u, v))^2}$
 Anschaulich: Parallelogramme, Flächeninhalt beim \times -Produkt, der zu N führt.

56.5 Bemerkungen zum Parameterintegral

Zulässige Parameterwechsel: g injektive C^1 -Fkt., $\det g'(s, t)$ entweder >0 oder <0 überall, enthaltene kompakte nach enthaltene kompakte. Inhalt bleibt gleich \Rightarrow Inhalt des Flächenstücks.



56.6 Beispiele

Kugeloberfläche

56.7 Definition

$\Phi = (X, Y, Z)$ sei Fläche mit Parameterbereich $K. F = \Phi(K).$
 $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ stetiges **Skalarfeld.** $\int_{\Phi} g \, d\sigma := \int_K g(\Phi(u, v)) |N(u, v)| d(u, v)$ **Oberflächenintegral**
 $n(u, v) := N(u, v) / |N(u, v)|$ (oder $=0$, falls Länge 0) **Normaleneinheitsvektor**
 $f = (f_1, f_2, f_3): F \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetiges **Vektorfeld.**
 $\int_{\Phi} f \cdot n \, d\sigma := \int_K f(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) d(u, v)$ Oberflächenintegral von f über Φ (In Herleitung ungefähr Kettenregel, $n(u, v) |N(u, v)|$ kürzen!) $=: \int_{\Phi} f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$

56.8 Bemerkungen zum Parameterwechsel

$\int_{\Phi} f \, d\sigma$ ändert sich bei Parameterwechsel nicht.
 $\int_{\Phi} f \cdot n \, d\sigma$ invariant unter positivem Parameterwechsel ($\det g' > 0$), sonst Negat.



56.9 Anschauliche Deutung der Oberflächenintegrale

Ladungsdichte / Massedichte \Rightarrow Gesamtladung / Masse
 f Geschwindigkeitsfeld. \Rightarrow Fluß von f durch F ; Flüssigkeitsmenge, die von - zu + übertritt.

..... Definition

Flächenstück orientieren \Leftrightarrow In jedem Punkt Normalenvektor so festlegen, daß $n: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig ist. Es gibt Flächenstücke, die nicht orientierbar (MÖBIUSband)

§57 Integralsätze von STOKES und GAUSS

57.1 Integralsatz von STOKES

Φ Fläche mit Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^2, K$ C^1 -Normalbereich bzgl. beider Achsen. Φ C^2 -Fkt. auf K umfassender offener Menge. ∂K positiv orientierter Rand, parametrisiert durch stückweise geschlossene C^1 -Jordan-Kurve. $f = (f_1, f_2, f_3)$ C^1 -Vektorfeld auf offener Menge, die $F = \Phi(K)$ umfaßt.



$\int_{\Phi} (\text{rot } f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial \Phi} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
 Gilt $\psi = \Phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ stückweise glatt, so
 $= \int_a^b f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt + \int_{\psi} f \cdot \hat{t} ds, \hat{t} = (\psi'(t) / |\psi'(t)|)$ Tangentialeinheitsvektor
 $\text{rot } f := (D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1, D_2 f_3 - D_3 f_2)$

Der Fluß von $\text{rot } f$ durch F ist gleich der Zirkulation (Wirbelstärke) von f längs der Berandung.

Schreibweise: $\int_{\Phi} (\text{rot } f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial F} f \cdot dr = \int_{\partial F} f \cdot \hat{t} ds.$
 Dabei $\hat{t} = (\psi'(t) / |\psi'(t)|), f \cdot dr = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$

57.2 Bemerkung

f: $G \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -Fkt., $\text{rot } f = 0$ auf G (Gebiet). γ geschlossener stückweiser C^1 -Weg.
Falls $F \subset G \Rightarrow \int_{\gamma} f \cdot dr = \int_F (\text{rot } f) \cdot n \, d\sigma = 0 \Rightarrow f$ Gradientenfeld auf G

57.3 Spezialfall (STOKES liefert GAUSS)

$K \subset \mathbb{R}^2$ C^1 -Normalbereich bzgl. beider Achsen. dK pos. orient. Rand.
 $\Phi(u,v) = (u, v, 0) \Rightarrow N(u,v) = n(u,v) = (0, 0, 1)$. $f = (f_1, f_2, f_3)$ C^1 -Vektorfeld, $f_3 = 0$, $D_3 f_1 = D_3 f_2 = 0$
 $\Rightarrow \text{rot } f = (0, 0, D_1 f_2 - D_2 f_1)$, $(\text{rot } f) \cdot n = D_1 f_2 - D_2 f_1$
 $\int_{\Phi} (\text{rot } f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\gamma = \Phi \circ \gamma} f_1 dx + f_2 dy$

57.4 Definition

$\Phi \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f = (f_1, f_2, f_3)$ C^1 -Vektorfeld
 Skalarfeld „Divergenz von f “ $\text{div } f := D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$

57.5 Integralsatz von GAUSS im \mathbb{R}^3

V „geeignete“ kompakte Menge, f C^1 -Vektorfeld auf V umfassender offener Menge, n Normaleneinheitsvektor. $\Rightarrow \int_V \text{div } f \, d(x,y,z) = \int_{\partial V} f \cdot n \, d\sigma$ (Fluß von f).
Der Fluß von f durch den Rand von V ist gleich dem über V erstreckten Integral über die Quellendichte von f .

57.6 Folgerung

Es gilt: $\lambda_3(V) = 1/3 \cdot \int_{\partial V} (x, y, z) \cdot n \, d\sigma$ [$\text{div}(x, y, z) = 3$] *Volumen aus Oberfläche.*

57.7 Beispiele

Inhalt einer Kugel
 Prinzip des ARCHIMEDES: Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

..... Definition (Verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$u = a r \cos \varphi$, $v = b r \sin \varphi$

Wegintegral	f C-Vektorfeld: $\int_{\gamma} f(x) dx := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt$ $= \int_{\gamma} f \cdot \dot{\gamma} ds$ g C-Skalarfeld: $\int_{\gamma} g dx_j := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt$
Wegintegral bzgl. Weglänge	g C-Skalarfeld: $\int_{\gamma} g ds := \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ GAUSS im \mathbb{R}^2 : $\int_{dB} P dx + Q dy = \int_B (D_1 Q - D_2 P) d(x,y)$ (<i>Weg-Bereich</i>)
Oberflächenintegral	f C-Vektorfeld: $\int_{\Phi} f \cdot n \, d\sigma := \int_K f(\Phi(u,v)) \cdot N(u,v) d(u,v)$ g C-Skalarfeld: $\int_{\Phi} g \, d\sigma := \int_K g(\Phi(u,v)) N(u,v) d(u,v)$ STOKES im \mathbb{R}^3 : $\int_{\Phi} (\text{rot } f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\Phi \circ \gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
Volumenintegral	GAUSS im \mathbb{R}^3 : $\int_V \text{div } f \, d(x,y,z) = \int_{\partial V} f \cdot n \, d\sigma$
Integral über Normalbereiche	FUBINI, TONELLI

Kapitel XIV. Gewöhnliche Differentialgleichungen

§58 Definitionen und Beispiele

58.1 Definition

Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$$

Lösung, Lösungsintervall:

$$I \text{ Intervall, } (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in S \quad \forall x, \quad F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))=0 \quad \forall x$$

Fortsetzung, enthalten: Intervall enthalten, auf dem kleineren gleich.

Explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, sonst implizit.

Anfangswertproblem AWP: Mit $y(x_0)=y_0$.

58.2 Beispiele

AWP, $y'=\sqrt{|y|}$, lokale Eindeutigkeit bei $y_0 \neq 0$ (Auf x-Achse Verzweigung möglich!)

Linienelement der Dgl: Tripel $(x, y, f(x,y))$

Richtungsfeld

Isokline: Punkte gleicher Steigung

58.4 Polygonzugverfahren

RUNGE-KUTTA

58.5 Existenzsatz von PEANO

Bei stetigem $y'=f(x,y)$ geht durch jeden Punkt aus D mindestens eine Lösung

Ohne Beweis! Grenzübergang des RUNGE-KUTTA.



58.6 Bemerkung

Einschränkung bringt nichts Neues.

Sprache: „AWP genau die Lsg.“: Es ex. Lsg. und jede weitere ist Einschränkung.

„AWP hat eine eindeutig bestimmte Lsg.“: Jede weitere Lsg. ist Fortsetzung.

§59 Dgl. mit getrennten Veränderlichen

59.1 Satz

Typ I: $y'=f(x) \cdot g(y)$

Eindeutige Lösung: $y=G^{-1}(F|_{y_0})$. $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt$. $G(x)=\int_{x_0}^x 1/g(t)dt$.

Beweis: $y'(t) / g(y(t)) = f(t)$ integrieren, Substitution. => Wenn existent, so eindeutig.

Existenz durch Differentiation.



59.2 Praktische Anwendung

Trennung der Variablen, $dy/g(y) = f(x) dx$. Integrieren, additive Konstante beachten!

59.3 Beispiele

59.4 Der Fall „ $g(y_0)=0$ “

$y(x)=y_0$ Lsg., evtl. weitere.

59.5 Beispiel

59.6 Dgln, durch Substitution auf die Form $y'=f(x) \cdot g(y)$ gebracht

Typ II: $y'=f(y/x)$

Lösung: $y(x):=x \cdot u(x)$. => $y'=xu'(x)+u(x)=f(u(x))$, $u'=(f(u)-u)/x$, Typ I. $y(x)=x \cdot u(x)$ Lsg.

Typ III: $y'=f((ax+by+c)/(Ax+By+C))$

Lösung: $\mathbf{c=C=0}$: $u' = f((a+b \cdot y/x)/(A+B \cdot y/x))$ **Typ II.**

$c^2+C^2 \neq 0, \det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} \neq 0$: LGS $ax+by+c=0, Ax+By+C=0$.
 Nullpunkt verschieben, $v(u)=y(u+x_0)-y_0$, **Typ IIIa**
 $c^2+C^2 \neq 0, \det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = 0$: $b=B=0 \Rightarrow$ **Typ I**.
 $0 \leq B \leq A, B \neq 0. \Rightarrow aB-Ab=0 \Rightarrow a=(b/B)A=\lambda A, b=\lambda B$.
 $v(x)=Ax+By(y). v'(x)=A+B \cdot f((\lambda v+c)/(v+C))$ **Typ I**. $y=(v-Ax)/B$

§60 Lineare Dgln 1. Ordnung

..... **Definition**

$y' + g(x) \cdot y = S(x)$. Störfunktion $S(x)=0$: Homogen. $S(x) \neq 0$: inhomogen
 Ein **Linearer Differentialoperator** $L: C(I) \rightarrow C(I)$. $(L\phi)(x) := \phi'(x) + g(x) \cdot \phi(x)$.

60.1 Satz

(a) Menge aller Lsg. der hom. Dgl. $Ly=y'+g(x) \cdot y=0$: $c \cdot e^{-G(x)}$, G Stammfkt. von g .
 (b) Alle Lsg. der inhom. Dgl. $Ly=S(x)$: Partikuläre + homogene Lsg.
 (c) $Ly=S(x), y(x_0)=y_0$ als AWP auf I genau eine Lsg.
 Beweis: (a) $y=0$ trivial. Trennung der Variablen, Eindeutigkeit aus Typ I bei $y_0 \neq 0, y=0$ klar.
 (b) Linearität bei $Ly=Ly_p+Ly_H=S(x)$ ausgenutzt.
 (c) $y(x_0)=y_0(x_0)+c$, da $G(x_0)=0. \Rightarrow c=y_0-y_p(x_0)$ eindeutig bestimmt.

60.2 Variation der Konstanten

$y_p = c(x) e^{-G(x)}$, c als Funktion.
 Einsetzen $\Rightarrow c(x) = \int_{x_0}^x S(t) e^{G(t)} dt$. Probe!



60.3 Superpositionsprinzip

Partikuläre Lösungen y_1 von $Ly=S_1(x)$, y_2 von $Ly=S_2(x) \Rightarrow (y_1+y_2)$ Lsg. von $Ly=S_1(x)+S_2(x)$



60.4 Zusammenfassung, Strickmuster!

§61 Exakte Dgl.

61.1 Definition: „Exakt“

$D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet. $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
 $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$ exakt \Leftrightarrow Vektorfeld $(P,Q): D \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt Stammfunktion in D
 (d.h. $\exists F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(P,Q) = \text{grad } F, P(x,y) = D_1 F(x,y), Q(x,y) = D_2 F(x,y)$.
 P, Q C^1 -Funktionen: $D_2 P = D_1 Q$ (Integrabilitätsbed.) notwendig, hinreichend bei D
 konv./sternf.



61.2 Satz

$P(x,y)+Q(x,y) \cdot y'=0$ sei exakt, F sei Stammfunktion.
 (a) y diffbar, Graph $(x,y(x))$ ganz in D . y Lsg. $\Leftrightarrow \exists c$ mit $F(x,y(x))=c$
 (b) $(x_0,y_0) \in D, Q(x_0,y_0) \neq 0$. Dann ex. offenes Intervall, genau eine Lsg. des AWP mit $y(x_0)=y_0$.
 Beweis:
 (a) y Lsg. \Leftrightarrow Graph in D und $0 = P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x) = D_1 F(x,y(x)) + D_2 F(x,y(x)) \cdot y'(x) = d/dx F(x,y(x)) \Leftrightarrow$ Graph in D und $F(x,y(x))=c$
 (b) Hauptsatz über implizite Funktionen. Löst nach (a) das AWP

Ansage!

61.3 „Integrierender Faktor“ (Multiplikator)

$\mu(x,y) \cdot P(x,y) + \mu(x,y) \cdot Q(x,y) \cdot y' = 0$ exakt. Bei $P, Q \in C^1$: Int-Bedg.: $D_2 P \mu + P D_2 \mu = Q D_1 \mu + \mu D_1 Q$

Anwendung: Faktor, der nur von x oder y abhängt. Dann $\mu'(x)/\mu(x) = 1/Q \cdot (D_2P - D_1Q) =: R(x)$
 $\Rightarrow \mu(x) = e^{\int R(x) dx}$

61.4 Beispiel

Bestimmen der Stammfunktion: P und Q integrieren, jeweils zzgl. Summand nur von y bzw. x abhängig. Aufsummieren, Summanden nur einfach

§62 Existenz und Eindeigkeitssätze

62.1 Definition

(Globale) LIPSCHITZ-Bedingung bzgl y: $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L \cdot |y - z| \quad \forall (x,y), (x,z) \in D$
 Lokale LIPSCHITZ-Bedingung bzgl. y: $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L \cdot |y - z| \quad \forall (x,y), (x,z) \in D \cap U_\epsilon(x_0, y_0)$

62.2 Beispiele

Lokale L-Bedg. bei $f \in C^1(D)$
 Globale L-Bedg. bei $f \in C^1(d)$ und D_2f beschränkt auf D.

62.3 Satz von PICARD-LINDELÖF

f stetig, in R (Kompaktes Rechteck) Lipschitz bzgl y \Rightarrow AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ eine eindeutige Lsg. mindestens in Intervall (Siehe PEANO, jetzt auch Eindeutigkeit)
 Beweis: $(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t,y(t)) dt$. Kontrahierende Selbstabbildung \Rightarrow BANACHSCHER Fixpunktsatz auf $(C(I), \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow$ Eindeutige Lösung.



62.4 Bemerkungen

Lösung im Winkelraum der Diagonalen des Lösungs-Intervalles in \mathbb{R}^2 , da $|y'(x)| \leq M \leq \alpha/b$
 Sukzessive Approximation, **PICARD-ITERIERTE**: $y_0(x) := y_0$, $y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$.
 Konvergiert **gleichmäßig** im BANACH-Raum $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ gegen Lösung y.



62.5 Folgerung

PICARD-LINDELÖF bei lokale LIPSCHITZ-Bedingung von f stetig auf Gebiet D.
 Es existiert dann eine lokal eindeutige Lösung
 Beweis: $\|\cdot\|_\infty$, U_ϵ wählen, daß ganz in D. Rechteck \Rightarrow PICARD-LINDELÖF

62.6 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

$D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in D lokale LIPSCHITZ-Bedg. bzgl. y.
 \Rightarrow AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lsg. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$
 Graph läßt sich durch keine kompakte Teilmenge von D umfassen, kommt dem Rand beliebig nahe, verläuft von Rand zu Rand



§63 System von Dglen 1. Ordnung

63.1 Definition

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.
 $y' = f(t,y)$, $(t,y) \in D$ **Normalsystem von Dgln 1. Ordnung** ($y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n)$)
 $f \in C^1$, $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit I Intervall, $(t,y(t)) \in D$, $y'(t) = f(t,y(t)) \quad \forall t \in I$ ist **Lösung**
 Zusätzlich $y(t_0) = y_0$: **AWP**.

63.2 Geometrische Interpretation

Phasenbahn, Trajektorie
 Lösung

63.3 Definition

(lokale / globale) LIPSCHITZ-Bedingung bzgl. y, jetzt mit beliebiger Norm des \mathbb{R}^n

- 63.4** **Satz von PICARD-LINDELÖF**
Stetige Fkt. auf $R = \{t, |t - t_0| \leq a\} \times \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - y_0\| \leq b\}$ „Rechteck“ LIPSCHITZ-Bedingung.
 \Rightarrow AWP $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, genau eine eindeutige lokale Lösg. mindestens auf Intervall
- 63.5** **Bemerkungen**
 Lösung ist Fixpunkt im BANACH-Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$: $y = Ay = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$,
 komponentenweise
- 63.6** **Existenz- und Eindeigkeitssatz** **Zentral** 
 Fkt. stetig und auf Gebiet lokal LIPSCHITZ.
 (a) AWP $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, genau eine Lsg.
 (b) Rand zu Rand, durch keine kompakte Menge $K \subset D$ abdeckbar!
- 63.7** **Transformation einer Dgl. n-ter Ordnung auf ein System 1. Ordnung**
 Explizite Dgl. n-ter Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
 \Leftrightarrow System $u_1' = u_2, u_2' = u_3, \dots, u_n' = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$. Setze $u = (u_1, \dots, u_n)$, $F = (F_1, \dots, F_n)$.
 $F_j(x, u_1, \dots, u_n) = u_{j+1}$. $F_n(x, u_1, \dots, u_n) = f(x, u_1, \dots, u_n)$.
 Nur Systeme numerisch lösbar!
- 63.8** **Bemerkungen**
 (a) F stetig $\Leftrightarrow f$ stetig (letzte Komponente!)
 (b) f LIPSCHITZ $\Leftrightarrow F$ LIPSCHITZ
- 63.9** **Existenz- und Eindeigkeitssatz**
 D Gebiet, f stetig, lokale LIPSCHITZ-Bed.
 (a) AWP $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_2, \dots$ genau eine Lsg. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$
 (b) Rand zu Rand

§64 **Lineare Differentialgleichungen**

- 64.1** **Definitionen und Bezeichnungen**
 Abbildungsnorm $\|A\| = \sup\{\|Ax\|: \|x\| \leq 1\}$. $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. $\|ABx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
 $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ NLR ist **normierte BANACH-Algebra** $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ (mit Multiplikation Algebra)
Zeilen-, Spaltensummennorm (Maximum aller Zeilen-/Spaltensummen)
Verträglichkeit von $\|\cdot\|: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Muß gelten: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
 Bsp: Euklid-Normen $\|\cdot\|_e: \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2}$ und $\|\cdot\|_2: \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ verträgl. $\|\cdot\|_e$ keine Abbildungsnorm.
 Diffbarkeit von $t \rightarrow A(t) := (a_{ik}(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$ Alle $a_{ik}: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar. $A'(t) = (a'_{ik}(t))$
 (Vgl. 40.8, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffen. Matrix in eine Zeile!)
Lineares Dgl-System 1. Ordnung: $y' = A(t)y + g(t)$, $A(t) = (a_{ik}(t))$, $a_{ik}: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
Homogen: $g(t) = 0$. Sonst **inhomogen**.
- 64.2** **Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Systeme**
 AWP $y' = A(t)y + g(t), y(\tau) = \eta, a_{ik} \in C(I, \mathbb{R}), g \in C(I, \mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
 Beweis: (i) $f(t, y) := A(t)y + g(t) \in C(D, \mathbb{R}^n), D = I \times \mathbb{R}^n$. (ii) f in D lokale LIPSCHITZ-Bed.
 (i) Folgenkriterium (ii) L -Konstante $\|A(t)\|$. Da $t \rightarrow \|A(t)\|$ stetig \Rightarrow Auf jedem Streifen L -Bed.
- 64.3** **Satz**
 (a) \mathcal{L} (Die Menge aller Lösungen von (H)) n -dim. linearer UR von $C(I, \mathbb{R}^n)$.
 (b) Isomorphismus $T_\tau: \mathbb{R}^n: \eta \rightarrow T_\tau(\eta) := y(\cdot; \tau, \eta) \in \mathcal{L}$ (eindeutig bestimmte Lösung)

Beweis: (b) UR-Kriterium nachprüfen. Surjektiv nach Def., Injektiv, da eindeutig. => (a) Isomorphismus $\dim \mathbb{R}^n = \dim T_\tau(\eta)$ UR.

64.4 Folgerungen und Definitionen

- (a) Linearkombination von Lsg. ist Lsg. von (H) Ansage! 
 ∞ viele Lsg., aber nur n linear unabhängige zu bestimmen!
- (b) Lsg. von (H) an einer Stelle 0 => überall 0
- (c) Lineare (Un-)Abhängigkeit: Konstante α_1, \dots , nicht alle 0, LinKombi = 0
 y_1, \dots, y_k Lösungen linear unabhängig \Leftrightarrow 
 Für ein $\tau \in I$ sind die Vektoren $y_1(\tau), \dots, y_k(\tau)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
 Für jedes $t \in I$ sind die Vektoren $y_1(t), \dots, y_k(t)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n
- (d) $k > n = \dim$ Lsg. stets lin. abh.
- (e) Es gibt n lin. unabh. Lsg. von (H). **Hauptsystem, Fundamentalsystem** von (H)
 Alle Lösungen eindeutig als Lin-Kombi darstellbar (Basen).
- (f) Lösungsmatrix $Y(t)$, Lsgen spaltenweise. $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$
 Hauptsystem \Leftrightarrow Für jedes t regulär \Leftrightarrow Für ein τ regulär $\Leftrightarrow \det Y(\tau) \neq 0$
- (g) $y(t) = Y(t) \cdot \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Jede Lsg. als Lin.-Kombination
- (h) $X(t)$ spezielles Hauptsystem mit $X(\tau) = E$, $\tau \in I$.
 X bekannt, so jede Lsg. eines APW $y(\tau) = \eta$ angeben: $y(t) = X(t) \cdot \eta$
- (i) Lsg. mit konstanter regulärer Matrix multiplizierbar => wieder Lsg.
- (j) $Y(t)$ Lsg. => $Y(t) = X(t) \cdot Y(\tau)$ Lsg. mit richtigen AW
 Beweis: $X(t) \cdot Y(\tau)$ differenzieren, $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$.
- (k) Hauptsysteme durch Multiplikation mit regulärer Matrix ineinander überführbar

64.5 Definition

WRONSKI-Determinante $W(t) = W_{[y_1, \dots, y_n]}(t) = \det Y(t)$

64.6 Satz 

sp $A(t)$ Spur.
 $W'(t) = (\text{sp } A(t)) W(t)$
 $\Rightarrow W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{sp } A(t) dt}$
 $\Rightarrow W(t)$ entweder immer oder nie $\neq 0$. $W(t)$ ohne Kenntnis der Lösung allein aus AW $y(t_0)$.
 Beweis: ---

64.7 Zusammenfassung

$y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (H), $Y(t) = (y_1, \dots, y_n)$ Hauptsystem $\Leftrightarrow y_1, \dots, y_n$ lin. unabh. \Leftrightarrow
 $w(\tau) = \det Y(\tau) \neq 0$. Entweder immer oder nie $\neq 0$.

64.8 Reduktionsverfahren von D'ALEMBERT

System (H) auf System mit (n-1) Dgl. rückführbar
 Jede neue Lsg. lin. unabh. von den Alten
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ Lösung von (H). $h \in C^1(I, \mathbb{R})$, $z = (0, z_2, \dots, z_n) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ noch unbekannte Funktionen.
 Ansatz: $y(t) = h(t)x(t) + z(t)$. y ist Lsg. von (H) \Leftrightarrow
 $y'(t) = h'(t)x(t) + hx'(t) + z' = H(t)Ax + h'(t)x(t) + z' =$
 $= h(t)Ax + Az = Ay \Leftrightarrow z' = A(t)z - h'(t)x(t)$. $\Rightarrow 0 = \sum_{j=2}^n a_{1j}z_j - h'x_1$, $z'_i = \sum_{j=2}^n a_{ij}z_j - h'x_i$. Einsetzen:
 $z'_i = \sum_{j=2}^n (a_{ij}x_j(t)/x_1(t) - a_{ij})z_j$ ist homogenes System von (n-1) Dglen. Dann $h(t)$ durch
 Integrieren und $y(t) = h(t)x(t) + z(t) = h(t)(x_1(t), \dots, x_n(t)) + (0, z_2(t), \dots, z_n(t))$ ist Lsg.

64.9 Beispiel

64.10 Satz

lineares inhomogenes System, zugehöriges homogenes System
 Differenz von Lsg. von (IH) ist Lsg. von (H). $y = y_p + y_h$. Superpositionsprinzip
 Beweis: Klar durch Linearität von $A(t)$

64.11 Variation der Konstanten

$y_p(t) = Y(t) \cdot c(t)$, c Vektor von Funktionen. $y_p'(t) = Y'(t) \cdot c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)c'(t)$
 $=== A(t)y_p(t) + g(t)$. $\Rightarrow Y(t)c'(t) = g(t)$. $\Rightarrow c(t) = \int_{\tau}^t Y^{-1}(s)g(s) ds$
 Praktische Durchführung: $Y(s)c'(s) = g(s)$ LGS, $c_s'(s) = W_j(s)/W(s)$ nach CRAMERScher Regel.
 $\Rightarrow y_p(t) = Y(t) \cdot \int_{\tau}^t c'(s) ds$

64.12 Beispiel

§65 Lineare Dgl-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

..... Komplexe Rechnung

Komplexe Lösungen, Einführung: $\text{Re } y(t) := u(t)$, $\text{Im } y(t) := v(t)$.
 Stetigkeit in \mathbb{C} : Stetigkeit vom Im und Re .
 Diffbarkeit in \mathbb{C} : Diffbarkeit von Im und Re , $y'(t) = u'(t) + iv'(t)$.
 Basis, auf \mathbb{C}^n alle Normen äquivalent, da auf \mathbb{R}^{2n} Isomorphismus zu \mathbb{C}
 Matrix für lineare Abbildung, Lösungsbegriff auf ganz \mathbb{C}^n , nicht nur auf Intervall.

65.2 Satz (Existenz- und Eindeutigkeit), analog 64.2

$g: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig. Dann AWP $y' = Ay + g(t)$, $y(p) = q$ genau eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{C}^n$

65.3 Bemerkung

Lokale Lösung durch PICARD-LINDELÖF als Grenzwert einer Folge im BANACH-Raum $C(J, \mathbb{C}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervall mit $\tau \in J$.

..... Lineare Algebra

Eigenwert, Eigenvektor, Eigenpaar, charakteristisches Polynom

..... Hinführung zu Eigenwert- / Eigenvektorbetrachtung

Lösungsansatz: $y(t) := e^{\lambda t} v$. $\Rightarrow d/dt e^{\lambda t} v = \lambda e^{\lambda t} v$, $A(e^{\lambda t} v) = e^{\lambda t} (Av)$.
 Also: $y(t) = e^{\lambda t} v$ erfüllt (H) $\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow \lambda$ EW zu EV v

65.4 Satz (Komplexer Fall)

(H) $y' = Ay$. $y(t) = e^{u t} v$, u aus \mathbb{C} , v aus \mathbb{C}^n , Lsg $\Leftrightarrow (v, u)$ Eigenpaar von A
 Alle EV linear unabhängig (z.B. EW paarweise verschieden) \Rightarrow HS

65.5 Satz (Reeller Fall)

Matrix A konstant und reellwertig.

Ansage! 

EW in komplexe und reelle einteilen. Reelle EV normal, Komplexe EV aufsplitten in Real- und Imaginärteil. Re und Im lin. unabh., EV lin. unabh. \Rightarrow HS

Beweis: z.z.: Funktionen im reellen LR $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ linear unabhängig.

System $\{y_1, \dots, y_n\}$ ist im LR $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ lin. unabh. Komplexes HS aber als LinKombi des Reellen über $\mathbb{C} \Rightarrow$ Können nicht lin. abh. sein über $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

65.6 Beispiel

AWP, siehe GÜ 116

65.7 Satz (Basistransformation)

C reguläre Matrix, $y(t) = Cz(z)$, $z(t) = C^{-1}y(t)$.

y Lsg. von $y' = Ay \Leftrightarrow z$ Lsg. von $z' = Bz$, $B = C^{-1}AC$

Beweis: $z'(t) = C^{-1}y'(t) = C^{-1}Ay(t) = (C^{-1}AC)C^{-1}y(t) = Bz(t)$

65.8 Bemerkung

Entkopplung: Matrix nach 65.7 auf Diag-Form bringen.



Möglich u.A. bei n linear unabhängigen Eigenvektoren
 Möglich bei symmetrischer reeller Matrix

§66 Technisches Beispiel: Stabbalance

..... Zustandsgrößen, Regelvektor

§67 Lineare Dglen n-ter Ordnung

..... Einführung

Lineare Dgl. n-ter Ordnung: $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = S(x) = Ly$
 Homogen ($S(x)=0$), sonst inhomogen

Linearer Differentialoperator n-ter Ordnung: $L: C^n \ni \varphi \rightarrow L\varphi \in C(I)$.

$$(L\varphi)(x) := \varphi^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\varphi'(x) + a_0(x)\varphi(x).$$

Rückführung auf lineares System 1. Ordnung: Ableitungen durchschleifen.

Matrix: obere Nebendiagonale 1, Koeffs untere Zeile $(-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1})$.

Störfunktion $g(x) = (0, 0, \dots, 0, S(x))$. Anfangsbedingung: $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \dots$

=> Verfahren aus §64 anwendbar (Lineare Dglen).

67.1 Satz (Existenz- und Eindeutigkeitsatz)

$Ly = S(x)$, AWP $y(\xi_0) = \eta_0, y(\xi_1) = \eta_1, \dots$ genau eine Lsg.

Beweis: 64.2, 63.7

67.2 Satz und Definition

Hauptsystem, Fundamentalsystem: Basis von \mathcal{L} = Menge aller Lösungen von (H) $Ly = 0$

WRONSKI-DETERMINANTE: $W(x) = \det(\text{Lösungen spaltenweise})$

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}$$

67.3 Beispiele (WRONSKI-DET.)

67.4 Reduktionsverfahren von D'ALEMBERT

(H) $Ly = 0$. Nachteil: Nach altem Verfahren kann Vereinfachung nicht mehr als lineare Dgl. (n-1)-ter Ordnung geschrieben werden (Besondere Matrixform!).

Ansatz: $y(x) = v(x)u(x)$ mit u bekannter Lsg. => Dgl. (n-1)-ter Ordnung für v' =>

$$\{u, v_1u, \dots, v_{n-1}u\} \text{ HS für (H).}$$

67.5 Spezialfall „n=2“

(H) $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. $y(x) = u(x)v(x)$. => $y'(x) = u'v + uv'$, $y''(x) = u''v + 2u'v' + uv''$ =>

$$Ly = Lu \cdot v + (2u' + a_1(x)u)v' + uv'' = 0 \Rightarrow v'' + (a_1(x) + 2u'(x)/u(x))v' = 0 \text{ Dgl. 1. Ordnung für } v'.$$

67.6 Satz

Partikuläre Lösung: y_p : Lsg. von (IH) $Ly = S(x)$

Superpositionsprinzip gilt

67.7 Variation der Konstanten

$y_p = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$. Lineares Dglsystem $u' = A(x)u + g(x)$, $A(x)$: wie unter §67 Einführung, $g(x)$ Nullen, nur unten die Störfunktion, $U(x) = \text{Matrix der } y_1, \dots, y_n$ obere Zeile, darunter die Ableitungen, ist HS von $U' = AU \Rightarrow$ 64.11: $u_p = U(x) \cdot \int_{x_0}^x (U^{-1}(s)g(s))ds$. Erste Komponente von u_p ist y_p .

Praktische Durchführung: $c_1'(s), \dots, c_n'(s)$ mit CRAMERSCHER Regel.



- 67.8** **Spezialfall „n=2“** **Ansage!** 
 (IH) $Ly=y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=S(x)$.
 $\{y_1, y_2\} \subset C^2(I)$ Hauptsystem, etwa durch Raten und D'ALEMBERT.
 Ansatz: $y_p=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow y_p'=c_1y_1'+c_2y_2' + c_1'y_1+c_2'y_2$ $\mathbf{c}':=\mathbf{0}$. (1. Gleichung).
 $(Ly_p)(x)$ aufstellen $\Rightarrow c_1y_1'+c_2y_2' = S(x)$ (2. Gleichung) bilden LGS. CRAMERSche Regel.
- 67.9** **Beispiel**

§68 **Lineare Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

- 68.1** **Satz**
 $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=S(x)$, $a_\nu \in \mathbb{C}$, $S: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
 AWP $y(\xi)=\eta_0$, $y'(\xi)=\eta_1, \dots$ genau eine Lsg.
 Beweis: Überführung auf lineares System, dann 65.2
- 68.2** **Definition & Satz**
 $D: C^\infty \rightarrow D^\infty$, $Dy=y'$ **Differentiationsoperator**, linear \Rightarrow Endomorphismus
 $C[u]$ **Algebra aller Polynome** mit Koeffizienten aus \mathbb{C}
 $C[\lambda] \ni p \rightarrow p(D) \in L(C^\infty(I))$, p Polynom! \Rightarrow Homomorphismus
 $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda-\lambda_r)^{k_r}$ Linearfaktorzerlegung $\Rightarrow p(D)=(D-\lambda_1 \text{id})^{k_1} \dots (D-\lambda_r \text{id})^{k_r}$
Gilt nur für konstante Koeffizienten!
- 68.3** **Satz** 
 $p(D)e^{ux} = p(u)e^{ux}$
 Beweis: $p(\lambda)=\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$. $p(D)$ berechnen!
- 68.4** **Folgerung**
 $p \in C[\lambda]$, $p(\lambda)=0$ Nullstelle $\Rightarrow y(x)=e^{\lambda x}$ ist Lösung der Dgl. $p(D)y=0$
- 68.5** **Satz**
 $p \in C[\lambda]$ mit n paarweise verschiedenen Nullstellen. $\Rightarrow p(D)y=0$ hat HS $y_k(x)=e^{\lambda_k x}$
 Beweis: Folgerung 68.4. z.Z. lin. unabh. durch WRONSKI-Determinante = VANDERMONDSCHES
 Determinante $\neq 0$ von $(1, \dots, 1 \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad \lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2 \quad \dots)$
- 68.6** **Hilfssatz**
 $(D-\lambda)^k (f(x) e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x) e^{\lambda x}$
 Beweis: Induktion nach k .
- 68.7** **Hilfssatz**
 $p(\lambda) \neq 0$, g Polynom vom Grad k .
 $p(D)(g(x) e^{\lambda x}) = h(x) e^{\lambda x}$. Grad $p =$ Grad h
 Beweis: Taylor-Entwicklung nach Potenzen.
- 68.8** **Satz**
 p habe v paarweise verschiedene Nullstellen mit Vielfachheiten k_1, \dots, k_n .
 (H) $p(D)y=0$ besitzt HS aus Lösungen $y_{j_0}(x)=e^{\lambda x}$, $y_{j_1}(x)=x e^{\lambda x}$, ...
 Beweis: ---
- 68.9** **Satz (Ins Reelle)**
 Re und Im sind Lösungen von (H), $Ly=p(D)y$, reelle konstante Koeffizienten.
 Beweis: $Ly=L(u+iv)=Lu+iLv=0 \Leftrightarrow Lu=0 \wedge Lv=0$
- 68.10** **Satz**
 Polynom mit reellen konstanten Koeffs und n paarweise verschiedenen Nullstellen.
 Re - und Im -Teil aufsplitten, ergibt Hauptsystem

Beweis: Lösung: klar. Lin. Unabhängig: Lin. Unabhängig über C, dies LinKombi der reellwertigen Lösungen über C => Können nicht lin. abhängig sein.

68.12 **Beispiel**

68.13 **Satz „Störfunktion $f(x) \cdot e^{\mu x}$ “**



(IH) $p(D)y = S(x) := f(x) e^{\mu x}$

f Polynom mit komplexen Koeffs vom Grad m. μ sei Nullstelle k-ter Ordnung (oder 0, falls keine Nullstelle) von p. $k \neq 0$ heißt **Resonanzfall**.

=> $y_p = h(x) x^k e^{\mu x}$, h Polynom auch vom Grad m.

Beweis: Induktion, Koeffizientenvergleich.

68.14 **Lösungsansatz für reellen Fall**

f reelles Polynom vom Grad m.

Aufsplitten in Re und Im.

Störfunktion $f(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \Rightarrow \text{Re}(y_p) = h(x)x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$ Partikul.

$f(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \Rightarrow \text{Im}(y_p) = h(x)x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$ Partikul.

68.15 **Beispiele**

§69 **Erzwungene Schwingungen**

..... **Feder-Masse-Dämpfungssystem**

$$y'' + 2 \rho y' + \omega_0^2 y = 1/m K(t) := a \cos \omega t$$

69.1 **Gedämpfte erzwungene Schwingung**

69.2 **Ungedämpfte erzwungene Schwingung**

Schwebung

§70 **Lineare Systeme 1. Ordnung, Teil II**

70.1 **Matrix habe keine n linear unabhängigen Eigenvektoren. Wie HS?**

Umwandlung in JACOBI-Matrix.

70.2 **Satz**

A konstante komplexwertige Matrix, EW $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, Vielfachheiten k_1, \dots, k_p .

=> $y' = Ay$ hat HS aus n Lösungen $p_{j0}(t)e^{\lambda_j t}$, $p_{j1}(t)e^{\lambda_j t}$, ..., $p_{j_{k_j-1}}(t)e^{\lambda_j t}$,

$p_{jv}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente Polynom vom Grad $\leq v$. $v = 0, 1, \dots, k_j - 1$. $j = 1, \dots, l$

70.3 **Satz**

A konstante reellwertige Matrix, ...

Splitten in Re und Im.

70.4 **Beispiel**

70.5 **2. Zugang zu 70.2**

Normen auf Matrizen, Konvergenz von Matrizen, e^A Matrix

Dglen mit getrennten Veränderlichen

Stetiges y' : PEANO => Durch jeden Punkt mindestens eine Lösung
 Funktion stetig, auf kompaktem Rechteck LIPSCHITZ-Bed. bzgl. y : PICARD-LINDELÖF
 => AWP eine eindeutige Lösung auf Intervall

Typ	Beschreibung	Lösungsmöglichkeiten
I	Dgl mit getrennten Veränderl. $y' = f(x) \cdot g(y)$, $f, g \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $g \neq 0$	$\exists I_0, y = G^{-1}(F _{I_0})$ eindeutig „Trennung der Variablen“
II	Dgl, die sich auf I bringen läßt $y' = f(y/x)$	$y(x) = x \cdot u(x)$. => $y' = xu'(x) + u(x) = f(u(x))$ => $u' = (f(u) - u)/x$ Typ I u Lsg. => $y(x) = x \cdot u(x)$ Lsg.
III	Dgl., die sich auf I bringen läßt $y' = f(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C})$	$c=C=0$: $u' = f((a+b \cdot y/x)/(A+B \cdot y/x))$ Typ II . $c^2+C^2 \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} \neq 0$: LGS $ax+by+c=0$, $Ax+By+C=0$. Nullpunkt verschieben, $v(u) = y(u+x_0) - y_0$, Typ IIIa $c^2+C^2 \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = 0$: $b=B=0$ => Typ I . $oBdA \ B \neq 0$. => $aB - Ab = 0$ => $a = (b/B)A = \lambda A$, $b = \lambda B$. $v(x) = Ax + By(y)$. $v'(x) = A + B \cdot f((\lambda v + c)/(v + C))$ Typ I . $y = (v - Ax)/B$
Exakt	$D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$	\exists Stammfunktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(P, Q) = \text{grad } F$ (Int.-Bedg. bei C^1) y diffbar, Graph in D Lösung $\Leftrightarrow F(x, y(x)) = c$ $Q(x_0, y_0) \neq 0$ => \exists offenes Intervall mit Lösung des AWP.
Integr. Faktor	$\mu(x,y) \cdot P(x,y) + \mu(x,y) \cdot Q(x,y) \cdot y' = 0$ ist exakt für ein μ	Lösung der einen Dgl. mit integrierendem Faktor auch Lösung der anderen Dgl. und umgekehrt. C^1 , Integr.-Bedg. mit $\mu: D_2 P \mu + P D_2 \mu = Q D_1 \mu + \mu D_1 Q$ partielle Dgl.

Lineare Dgls mit konstanten Koeffizienten

System 1. Ordnung: Stetige Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, auf kompaktem Rechteck Lipschitz bzgl y (bel. Norm!):
 PICARD-LINDELÖF => AWP $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ genau eine lokal eindeutige Lösung
 Existenz- und Eindeutigkeitsatz => genau eine Lsg., von Rand zu Rand

Typ	Beschreibung	Lösungsmöglichkeiten
System 1. Ordnung in C	$A = (a_{ij}) \in C^{n \times 2}$. $y' = Ay + g(t)$	Numerisch: PICARD-LINDELÖF im BANACH-Raum $C(J, C^n)$ (H): Eigenpaare bestimmen. n lin. unabh. EV (speziell: n versch. EW): HS aus $y(t) = e^{\lambda t} v$ (IH): Variation der Konstanten, CRAMERSche Regel
System 1. Ordnung in R	$A = (a_{ij}) \in R^{n \times 2}$. $y' = Ay + g(t)$	Numerisch: PICARD-LINDELÖF im BANACH-Raum $R(J, C^n)$ (H): Eigenpaare bestimmen. n lin. unabh. EV (speziell: n versch. EW): HS aus Re und Im (IH): Variation der Konstanten, CRAMERSche Regel

Dgl. n-ter Ordnung in C	$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = S(x)$ $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ $p(D)y = S(x)$	<ul style="list-style-type: none"> • Umwandeln in System 1. Ordnung. • Nullstellen λ mit Vielfachheit k von p bestimmen: (H): HS $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$. (IH): Variation der Konstanten. Spezialfall: $S(x) = f(x)e^{\lambda x} \Rightarrow y_p(x) = h(x)x^k e^{\lambda x}$, k Vielfachheit der Nullstelle (Resonanzfall), sonst 0. Grad $f = \text{Grad } h$
Dgl. n-ter Ordnung in R	$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = S(x)$ $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ $p(D)y = S(x)$	<ul style="list-style-type: none"> • Umwandeln in System 1. Ordnung • Nullstellen λ mit Vielfachheit k von p bestimmen: (H): HS Re und Im-Teil von je einer Konjugierten, reelle so (IH): Variation der Konstanten oder Spezialfall

Lineare Dgls mit variablen Koeffizienten

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), y' = A(t)y + g(t), a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $g \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Existenz- und Eindeigkeitssatz \Rightarrow AWP $y' = A(t) \cdot y + g(t), y(\tau) = \eta$ genau eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Typ	Beschreibung	Lösungsmöglichkeiten
System 1. Ordnung in R	$A = (a_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), y' = A(t)y + g(t)$ $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $g \in C(I, \mathbb{R}^n)$	<ul style="list-style-type: none"> • Raten einer Lösung • Reduktion nach D'ALEMBERT, $y(t) = h(t)x(t) + z(t)$, x bekannt. $h \in C^1(I, \mathbb{R})$. • Variation der Konstanten. CRAMER für c', $y_p(t) = Y(t) \cdot \int_{\tau}^t c'(s) ds$
Lineare Dglen n-ter Ordnung	$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = S(x)$ $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ $p(D)y = S(x)$	<ul style="list-style-type: none"> • Rückführung auf System 1. Ordnung (Obere Nebendiag,...) • Raten einer Lösung • Reduktion nach D'ALEMBERT, $y(x) = v(x)u(x)$, u bekannt. <i>Neues Verfahren, da nach Altem nicht mehr als Dgl (n-1)ter Ordnung \Rightarrow Dgl. (n-1)ter Ord. für $v' \Rightarrow \{u, v_1u, \dots, v_{n-1}u\}$ HS für (H)</i> • Variation der Konst.: Umwandeln in System. CRAMER für c',