Analysis II

Prof. Mertins

SS 1995

Wilko Hein

Kapitel VII. Integration

§25 .... Unbestimmte Integrale

25.1 .... Definition

F mit $F'(x)=f(x)$ Stammfunktion von f, unbestimmtes Integral von f auf I

25.2 .... Zwischenwertsatz für Ableitungen

$F:[a,b]\to R$ diffbar, $F'(a)\neq F'(b)$. => F' nimmt in (a,b) jeden Wert zwischen F'(a) und F'(b) an.
Beweis: $F'(a)>0>F'(b)$. F nahe bei a, b größer als F(a), F(b). => $\mu=F(\xi)$ Maximum => $F'(\xi)=0$.
$F'(a)\neq F'(b)$, λ zwischen F'(a) und F'(b). Betrachte $G(x) := F(x) - \lambda x$.

25.3 .... Satz „Integrationsregeln" ***(Jede Differentiationsregel liefert eine)***

(1) Endliche Summen
(2) Produktintegration, partielle Integration. $\int fg\,dx = Fg - \int Fg'\,dx$
(3) Substitutionsregel (1. Fall). f Intbar auf I, g diffbar auf I_0 und $g(I_0)\subset I$.
=> (f o g) g' Intbar mit $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) = \int f(u)\,du\,|_{u=g(x)}$
Merken: $\int u'\,v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx$
Beweis: Differenzieren!

25.4 .... Spezialfälle der Substitutionsregel

(4) $\int f(ax+b)\,dx = 1/a \cdot F(ax+b)$
(5) $g'(x)/g(x) = \ln|g(x)|$, $g(x)\neq 0$

25.5 .... Beispiele

25.6 .... Substitutionsregel (2. Fall)

g auf I_0 diffbar mit $g'(x)\neq 0$ (g' entweder ganz positiv/negativ). $g(I_0)=I$. (fog)g' Intbar =>
=> f Intbar mit $\int f\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \mid t=g^{-1}(x)$
Beweis: g streng monoton => $\exists\, h:=g^{-1}$. $h'=1/g'(h(x))$. $\Phi:=\int f(g(t))g'(t)$. z.z. $\Phi'(h(x)) = f(x)$.

§26 .... Kompaktheit und Nullmengen

26.1 .... Definition

(Endliche) Überdeckung von M: $M \subset \bigcup G_\nu$.
M kompakt <=> Jede offene Überdeckung enthält endliche Überdeckung
<=> M besitzt die HEINE-BORELsche Überdeckungseigenschaft

.... Beispiele

Abgeschlossenes, beschränktes Intervall immer kompakt
Beweis: Indirekt: Intervallschachtelung um das Intervall, das nicht durch endlich viele G überdeckt werden kann. Alle G offen, wähle zu ε kleinere Intervall-Länge aus Schachtelung.
Menge aus allen Folgengliedern einer konvergenten Folge zzgl. dem Grenzwert ist kompakt

26.2 .... Satz

Abgeschlossene Menge in kompakter Menge wieder kompakt.
Beweis: Klar.

26.3 .... Satz von HEINE-BOREL

$M\subset R$ kompakt <=> M abgeschlossen und beschränkt <=> Jede Folge aus M besitzt konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M
Beweis: ---

26.4 .... **Definition**
f gleichmäßig stetig auf S <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ mit $|f(x)-f(y)|<\varepsilon\ \forall\ |x-y|<\delta$.
f LIPSCHITZ-stetig auf S <=> $\exists\ L>0,\ |f(x)-f(y)| \le L\ |x-y|\ \ \forall\ x,y \in S$
LIPSCHITZ => Gleichmäßig => Stetig

26.5 .... **Satz**
f auf kompakter Menge stetig => f glm. stetig
Beweis: $\delta=\delta(\varepsilon,x)$. Offene Überdeckung $\cup\ U_{1/2\delta(\varepsilon,x)}$. Kompakt => Endlich viele genügen
=> δ:= 1/2 min dieser δs. Für y, y': $|y-x_k|< 1/2\ \delta(\varepsilon,x_k) < \delta$.
$|y'-x_k| \le |y'-y| + |y-x_k| < \delta + 1/2\ \delta(\varepsilon,x_k) < \delta(\varepsilon,x_k)$. => $|f(y)-f(y')| \le |f(y)-f(x_k)|+|f(y')-f(x_k)| <\varepsilon$

26.6 .... **Definition**
Endliches Intervall, $|I|$:=b-a „Länge" des Intervalls.
Nullmenge: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists$ höchstens abzählbar viele offene überdeckende Intervalle von Σ-Länge $<\varepsilon$

26.7 .... **Beispiel**
N und Q in R Nullmenge. CANTORsche Menge: Überabzählbare Nullmenge.

26.8 .... **Satz**
Teilmenge von Nullmenge ist Nullmenge
Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist Nullmenge

26.9 .... **Vereinbarung**
„fast überall"

§27 .... LEBESGUEsche Integrale

27.1 .... **Definition**
Zerlegung, Treppenfunktion (In Randpunkten keine Festsetzung!).
Treppenfunktion auf unendlichen Intervallen: Auf Einschränkung Treppenfkt., sonst =0
T(I) ist linearer Raum über R

27.2 .... **Definition**
Integral von φ über I: $\int_a^b \varphi(x)\,dx := \Sigma_{k=1}^n \varphi(I_k)\ |I_k|$.

27.3 .... **Satz**
Integral ist lineare und ordnungserhaltende Abbildung
Beweis: Addition: Zerlegung anpassen. Ordnungserhaltung: $\varphi\ge0 \Rightarrow \int_a^b \ge 0$

27.4 .... **Hilfssatz**
φ_n monoton fallende Nullfolge f.ü. von Treppenfkt. => $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx =0$
Beweis: Unstetigkeits- und Nichtkonvergenzpunkte Nullmenge. Rest hat endliche Überdekkung. Mit ε abschätzen. [Kompaktheit]

27.5 .... **Hilfssatz**
φ_n monoton wachsende Folge von Treppenfkt. mit beschränkter Integralfolge $(\int_I \varphi_n(x)dx)_n$
=> (φ_n) f.ü. konvergent.
Beweis: ---

27.6 .... **Definition**
$L^+(I)$:=Mege aller Funktionen, gegen die von unten Folge von Treppenfkt. mit beschränkter Integralfolge f.ü. konvergiert. (=> Integralfolge konvergent, Monotoniekriterium)
$\int_I f(x)\,dx := \lim \int_I \varphi_n(x)\,dx$. Rechts monoton wachsend und beschränkt, daher $\exists$ Grenzw.
Bleibt z.z.: Unabhängig von spezieller Wahl der φ_n.

27.7 .... Satz

(φ_n) und (ψ_n) monoton wachsende Folge von Treppenfkt. mit beschränkter Integralfolge.
$\lim \varphi_n \leq \lim \psi_n$ f.ü. => $\lim \int_I \varphi_n(x)dx \leq \lim \int_I \psi_n(x)dx$
Damit: 27.6 unabh. von der Wahl der Folge. Ungleichheit in beiden Richtungen f.ü.
Beweis: $(\varphi_n-\psi_n)$ monoton fallend, f.ü. konvergent gegen GW ≤ 0. $\lim (\varphi_m-\psi_n)^+(x) =$
$\lim \max\{0, (\varphi_m-\psi_n)(x)\} = 0$ f.ü. => $\int_I \varphi_m(x)dx - \int_I \psi_n(x)dx \leq \int_I (\varphi_m-\psi_n)^+(x)dx \to 0$

27.8 .... Beispiele

DIRICHLETsche Funktion.
R[a,b]:=Menge aller Fkt., auf [a,b] beschränkt und f.ü. auf [a,b] stetig. Linearer Raum über R
$R(I) \subset$ *[B(I)* $\subset$ *]* $L^+(I)$. Beweis: Zerlegung durch sukzessives Halbieren, Treppenfunktion durch Minimum der Zerlegungsintervalle. Nur auf Nullmenge der Unstetigkeitspunkte nicht konvergent. Integralfolge durch $M \cdot |I|$ beschränkt, M vorausgesetzte Schranke.

27.9 .... Bemerkung

L^+ kein linearer Raum, obwohl additiv und multiplikativ mit Konstante ≥ 0.
Beispiel: $-1/\sqrt{x}$

27.10 .... Definitionen

$L(I)$:=Menge aller Fkt. f=g-h mit $g, h \in L^+(I)$, Menge aller L-Integrierbaren Funktionen
LEBESGUEsches Integral: $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)$.

§28 .... Eigenschaften des L-Integrals

28.1 .... Satz

$f_1=f_2$ f.ü. => $\int_a^b f_1\, dx = \int_a^b f_2\, dx$
Beweis: Differenz, ---

28.2 .... Satz

L-Integralrechenregeln. L(I) Linearer (Funktionen-)Raum.
L-Integral lineare, ordnungserhaltende Abbildung
Beweis: Zurückführen auf L^+.

28.3 .... Satz

L(I) bzgl. max, min, $()^+$, $()^-$, $|\cdot|$ abgeschlossen
Beweis: ---

28.4 .... Satz

Integration durch Integration über Teilintervalle möglich.
Beweis: Klar durch Treppenfunktionen

28.5 .... Definition

$\int_a^a f\, dx := 0$
$\int_b^a f\, dx := - \int_a^b f\, dx$, falls a<b.

28.6 .... Satz

Bereichsadditivität, auch, falls nicht a<c<b.
Beweis: Auseinanderziehen

28.7 .... Satz

$f \in L(I)$. => $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, g,h \in L^+(I)$, f=g-h, $h \geq 0$, $0 \leq \int_I h\, dx < \varepsilon$
Beweis: ---

28.8 .... Mittelwertsatz der Integralrechnung

I **endliches** Intervall. $f \in L(I)$ beschränkt, $m \leq f(x) \leq M$. => $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
Beweis: Definiere zwei Treppenfunktionen konstant =m und =M. Ordnungserhaltung.

28.9 .... **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**
$f \in C[a,b]$, kompakt. $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$. => F diffbar mit $F'(x)=f(x)\ \forall x$
Beachte: Jedes f aus C[a,b] besitzt Stfkt., hinreichend, aber nicht notwendig
Beweis: $\int_a^x = \int_a^{x0} + \int_{x0}^x$ => $F(x)-F(x_0)=\int_{x0}^x f(t)dt$ => $F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)=\int_{x0}^x (f(t)-f(x_0))dt$
=> $(F(x)-F(x_0))/(x-x_0) - f(x_0) = 1/(x-x_0) \int_{x0}^x (f(t)-f(x_0))dt \to 0$, da Integrand $<\varepsilon$

28.10 .... **Bedeutung des Hauptsatzes**
$G(x)=F(x)+c$, Berechnung des L-Integrals ohne Grenzwertprozesse auf kompaktem Intervall

§29 .... Konvergenzsätze

29.1 .... **Hilfssatz**
Wachsende Funktionenfolge $\in L^+$ mit beschränkter Integralfolge konvergiert f.ü. gegen $f \in L^+$, es darf gliedweise integriert werden: $\lim \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$
Beweis: ---

29.2 .... **Konvergenzsatz von Beppo Levi**
Monotone Funktionenfolge $\in L$ mit beschränkter Integralfolge konvergiert f.ü. gegen $f \in L$, es darf gliedweise integriert werden.
Bedeutung: Erweiterungsprozeß von T über L^+ nach L nicht wiederholbar!

29.3 .... **Satz**
$f_k \in L$, $\Sigma \int_a^b |f_k|dx$ konv. => Σf_k konv. f.ü. gegen $f \in L$, gliedweise intbar: $\Sigma\int_a^b f_k dx = \int_a^b f dx$
Beweis: Zerlegen in s, t. Levi.

29.4 .... **Satz**
$f \in L$. $f=0$ f.ü. <=> $\int_a^b |f|\,dx =0$
Beweis: <=: => $\Sigma\int_a^b |f|dx$ konvergiert => Σf konv. f.ü. => $f=0$ f.ü. =>: nach 28.1

29.5 .... **Satz**
Intervall-Ausschöpfung $I_1 \subset I_2 \subset I_3 ...$, $\bigcup I_k = I$. Integralfolge $(\int_{Ik} |f|\,dx)$ beschränkt
(nicht notwendig konvergent!) => $f \in L$ mit $\int_I f\,dx = \lim \int_{Ik} f\,dx$
Beweis: f_n außerhalb des Intervalls I_n =0 setzen. Dann Beppo-Levi.

29.6 .... **Konvergenzsatz von Lebesgue, „majorisierte Konvergenz"**
Funktionenfolge $\in L$ konv. f.ü. gegen f. $g \in L$ mit $|f_n| \le g\ \forall n$. => $f \in L$, gliedw. intbar: $\int f_n dx \to \int f dx$
Beweis: g_n und h_n dort, wo konvergent, auf inf bzw. sup $\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}$. $g_n \to f-$, $h_n \to f+$ f.ü.
g_n und h_n nach Levi --- $\in L$. Integralfolgen dazu durch $\int_a^b g_1 dx$ bzw. $\int_a^b h_1 dx$ beschränkt.

29.7 .... **Folgerung „kleiner Lebesgue", „beschränkte Konvergenz"**
I **beschränktes** Intervall, Funktionenfolge $\in L$ f.ü. gegen f, $|f_n| \le M$ => $f \in L(I)$, $\int_a^b f_n dx \to \int_a^b f dx$
Beweis: Konstante Funktion auf beschränktem Intervall L-Intbar

29.8 .... **Satz „Lemma von Fatou"**
Nichtnegative Funktionenfolge $\in L$ f.ü. gegen f, $\int_I f_n dx \le M$. => $f \in L$, $\int_I f\,dx \le M$
Keine Aussage zur gliedweisen Integration!
Beweis: ---

29.9 .... **Satz**
Funktionenfolge konv. f.ü. gegen f. $g \in L$ mit $|f| \le g$ => $f \in L$.
Keine Aussage zur gliedweisen Integration!
Beweis: $g_n := \max(-g, \min(f_n,g)) \in L$. => $|g_n| \le g$, $g_n \to f$ f.ü. herleiten => Lebesgue

§30 .... Unbestimmtes Integral

30.1 .... Definition

$I=[a,b]$. $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ **das** unbestimmte Integral von f; Stammfkt. nur **ein** unbest. Integral

30.2 .... Satz

$f\in L[a,b]$. => $F\in C[a,b]$. *Glättungseigenschaft des Integrationsprozesses*

Beweis: $f\in L^+$. => $\exists$ Treppenfkt., $0\le\int_a^b (f-\varphi)dx < \varepsilon/2$. φ beschränkt. =>

$|F(x)-F(x_0)| = |\int_{x0}^x f(t)dt| \le |\int_{x0}^x (f-\varphi)dt| + |\int_{x0}^x \varphi dt| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2M = \varepsilon$

30.3 .... Satz „Partielle Integration“

$I=[a,b]$ kompakt, f, g, F, G. => $\int_a^b Fg\, dx = F(b)G(b)-F(a)G(a) - \int_a^b Gf\, dx =: [FG]_a^b - \int_a^b gF\, dx$

Beweis: ---

30.4 .... Bemerkungen

Auch für F+c, G+d gültig.

Für $f,g \in C[a,b]$ sind F, G Stammfkt. => Für $F, G \in C^1[a,b]$ gilt: $\int_a^b FG'dx = [FG]_a^b - \int_a^b F'G dx$

30.5 .... Substitutionsregel

$I=[a,b]$. $f\in L$, $g\in C^1([a,b])$ injektiv, $g' \ge/\le 0$ auf I. $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$

=> $t(x)=f(g(x))g'(x) \in L$, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt$

Beweis: ---

30.6 .... Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$I=[a,b]$. F diffbar, F' beschränkt auf I => $F' \in L$, $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\, dx$

Wann ist Funktion aus Ableitung rekonstruierbar?

Beweis: ---

30.7 .... Substitutionsregel II

$f\in C$, $g\in C^1$, $g([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$. => $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

Beachte: g nicht notwendig injektiv, dafür f stetig! ZWS 16.8: $g([\alpha,\beta])=[a,b]$

Beweis: ---

§31 .... Unter-, Ober- und Riemann-Summe

31.1 .... Definition

Zerlegung, Teilintervall, Feinheitsmaß (Maximum aller Teilintervall-Längen)

Zwischenvektor $\xi := (\xi_1, ..., \xi_n)$ mit $\xi_k\in I_k$

Untersumme $U(Z)=U(f,Z) := \Sigma_{k=1}^n \inf\{ f(x) : x\in I_k \} \cdot | I_k |$

Obersumme $O(Z)=O(f,Z) := \Sigma_{k=1}^n \sup\{ f(x) : x\in I_k \} \cdot | I_k |$

Zwischensumme $S(Z,\xi)=S(f,Z,\xi) := \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot | I_k |$ (Riemann-Summe)

.... Bemerkungen

Definiere $\varphi_z(x):= \{ \inf\{...\}$ für $x_{j-1}<x<x_j$, $f(x_j)$ für $x=x_j \}$,

$\psi_z(x):= \{ \sup\{...\}$ für $x_{j-1}<x<x_j$, $f(x_j)$ für $x=x_j \}$ => $\varphi_z \le f \le \psi_z$

=> $U(f,Z)=\int_a^b \varphi_z\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b \psi_z dx = O(f,Z)$

31.2 .... Hilfssatz

Z, Z' Zerlegungen, Z' enthält p Teilpunkte. $|f(x)|\le k$

(1) $U(Z) \le U(Z \cup Z') \le U(Z) + 2\, p\, k\, |Z|$

(2) $O(Z) \ge O(Z \cup Z') \ge O(Z) - 2\, p\, k\, |Z|$

(3) $U(Z) \le O(Z')$, insbesondere $\sup U \le \inf O$

31.3 .... **Bemerkung**

$\mathcal{M}(f) := \{ (x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \}$

„Flächeninhalt", wenn sup U = inf O =: $\mathcal{M}(f)$

31.4 .... **Satz**

I=[a,b], f∈R. => $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ Z$ mit $O(Z)-U(Z) < \varepsilon$. Insbesondere sup U = inf U = $L\text{-}\int_a^b f\,dx$

Beweis: ---

31.5 .... **Bemerkungen**

f∈B heißt R-Integrabel <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ Z$ mit $O(Z)-U(Z) < \varepsilon$.

Setze $R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx$:= sup U = inf O.

=> Lebesguesches Integrabilitätskriterium für R-Integrale:

$f \in R \iff f \in B$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ Z$ mit $O(Z)-U(Z) < \varepsilon$.

31.6 .... **Satz**

f∈R, (Z_n) Zerlegungsnullfolge. => $\lim U(f,Z_n) = \lim O(f,Z_n) = \lim S(f,Z_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$

Beweis: Einschachteln nach 31.2, Bolzano-Weierstrass, z.z., daß alle Teilfolgen hiergegen

§32 .... *Uneigentliche Integrale*

32.1 .... **Definition**

$f:[a,\infty)$, $\forall\ t$ $f \in L(a,t)$

f uneigentlich intbar über $[a,\infty)$ <=> $\exists \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$.

Schreibweise: $\int_a^{\to\infty} f(x)\,dx$.

Zu unterscheiden von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ für $f \in L(a,\infty)$, Approximation durch Treppenfkt.

Analog: $(-\infty,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) [c dazwischen annehmen]

32.2 .... **Beispiele**

$\int_1^t 1/x^\alpha\,dx = \{ x^{1-\alpha}/1-\alpha \quad \ln x \} \mid_1^t$ => $t\to\infty$ $\int_1^{\to\infty} 1/x^\alpha\,dx = 1/(\alpha-1)$ bei $\alpha>1$ konvergent

$\int_t^1 1/x^\alpha\,dx$. $t\to0+$ => $\int_{\to0}^1 1/x^\alpha\,dx = 1/(1-\alpha)$ für $\alpha<1$ konvergent

32.3 .... **Bemerkungen**

f, g über $[a,\infty)$ uneigentlich intbar.

=> Auch über $[b,\infty)$, $b \ge a$ uneigentlich intbar

=> $\alpha f + \beta f$ uneigentlich intbar (Linearität)

=> Ordnungserhaltung

32.4 .... **Satz „Cauchysches Konvergenzkriterium"**

$\int_a^{\to\infty} f\,dx$ konvergent <=> $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_0=t_0(\varepsilon)>a$, $\left|\int_{t1}^{t2} f\,dx\right| < \varepsilon\ \ \forall\ t_1,t_2 \ge t_0$

Beweis: Setze $F(t):=\int_a^t f\,dx$, dann lim F(t) betrachten

32.5 .... **Beispiel**

$\int_0^{\to\infty} \sin x/x\,dx$ konvergent, Partiell integrieren und abschätzen

32.6 .... **Definition**

Absolute Konvergenz

Beispiel: $\int_0^{\to\infty} \sin x/x\,dx$ nicht absolut konvergent

32.7 .... **Satz**

Absolute Konvergenz => Konvergenz und verallg. Dreiecksungleichung

32.8 .... **Majoranten- / Minorantenkriterium**

$\int_a^{\to\infty} g\,dx$ konvergent, $\int_a^{\to\infty} h\,dx$ divergent, =>

$|f| \le g$ auf $[a,\infty)$ => $\int_a^{\to\infty} f\,dx$ absolut konvergent. $|f| \ge h$ auf $[a,\infty)$ => $\int_a^{\to\infty} f\,dx$ divergent.

Beweis: Wie 13.4

32.9 .... Integralkriterium für Reihen

$f: [m, \infty)$ positiv, monoton fallend, $m \in N$.

$\Sigma_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $\int_m^{\to\infty} f(x)\,dx$ dasselbe Konvergenzverhalten

Beweis: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ $\forall x \in [k, k+1]$. => $1 \cdot f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq 1 \cdot f(k+1)$ =>

$\Sigma_{k=m}^{n} f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x)\,dx \geq \Sigma_{k=m}^{n+1} f(k+1) = \Sigma_{k=m+1}^{n+1} f(k)$ $\forall n>m$

$\Sigma f(k)$ konvergent => $\int_a^b$ monoton und beschränkt => Konvergenz

$\int_a^{\to\infty} f(x)\,dx$ konvergent => Σ monoton und beschränkt => Konvergenz

32.10 .... Bemerkung

Die Sätze auch auf die anderen Formen der uneigentlichen Integrale übertragbar.

32.11 .... Satz

Frage: Zusammenhang zwischen uneigentlichen Integralen und L-Integralen?

Uneigentliches Integral ist L-Integral <=> Absolute Konvergenz

Beweis:

=>: $I:=[a,\infty)$. $f \in L(a,t)$ $\forall t>a$. $f \in L(I)$. => $|f| \in L(I)$. => $\int_a^t |f|\,dx \leq \int_a^{\infty} |f|dt$ => Monotoniekrit.

=> $\exists \lim \int_a^t |f|dx$ => Absolute Konvergenz.

<=: $\int_a^{\to\infty} f(x)\,dx$ abs. kov. => $\int_a^t |f|\,dx \leq \int_a^{\to\infty} |f|\,dx$. => 29.5, Intervallausschöpfung => $f \in L(I)$

.... Beachte

Damit die Möglichkeit, L-Integrale über unendliche Intervalle oder Intervalle, wo die Stammfunktion nur auf Innerem existent, zu berechnen.

32.12 .... Beispiele

$\int_a^b \sin x/x$ konv., aber nicht absolut => auf $[0,\infty)$ nicht L-Intbar (Beweis: Summe über π-Interv.)

Beachte: Produkt L-Intbarer Funktionen nicht notwendig L-Intbar ($1/\sqrt{x}$), **keine Funktionenalgebra!**

§33 .... Meßbare Funktionen

33.1 .... Definition

f auf I meßbar <=> $\exists$ Folge von Treppenfuktionen (φ_n) mit $\varphi_n \to f$

33.2 .... Satz

$L \subset M$, $L \neq M$.

Beweis: f=g-h. Gegenbeispiel: $f(x)=1$ auf $[0,\infty)$.

33.3 .... Satz

$f \in M(I)$, $g \in L(I)$, $|f| \leq g$. => $f \in L(I)$ Beweis: $\varphi_n \in L(I)$. $\varphi_n \to f$ f.ü. 29.9 Majorisierte Konv.

Insbesondere: $f \in M(I)$, $|f| \in L(I)$ => $f \in L(I)$

33.4 .... Satz

M(I) ist Funktionenalgebra.

Bzgl. max, min, $\cdot^+$, $\cdot^-$, $|\cdot|$ abgeschlossen. Beweis durch Grenzübergang bei Treppenfkt.

33.5 .... Satz

$f \in M$, $f \neq 0$ f.ü. => $g = \{1/f,$ bel. bei $f=0\} \in M$

33.6 .... Satz

$f_n \in M$, $f_n \to f$ f.ü. => $f \in M$

33.7 .... Satz

$f \in M$, $g \in C(R)$ => $g \circ f \in M$. Insbesondere $|f|^p \in M$, $p>0$

33.8 .... Bemerkung

Alle normalen Funktionen, leicht auf Intbarkeit zu prüfen.

§34 .... L^p-Räume

34.1 .... Definition

$L^p(I) := \{ f \in M(I) \mid |f|^p \in L(I) \}$

34.2 .... Satz

$L^p(I)$ ist linearer Funktionenraum

Beweis: Summe wieder meßbar. $|f+g| \le |f|+|g| \le 2 \max\{ |f|,|g| \} \Rightarrow |f+g|^p \le 2^p \max(|f|^p, |g|^p)$

34.3 .... HÖLDERSCHE Ungleichung

$p,q>1$, $1/p + 1/q = 1$. $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I) \Rightarrow |\int_I fg\,dx| \le \int_I |fg|dx \le (\int_I |f|^p dx)^{1/p} \cdot (\int_I |g|^q dx)^{1/q}$

Beweis: ---, genauso wie für Summen

34.4 .... MINKOWSKIsche Ungleichung

$(\int_I |f+g|^p dx)^{1/p} \le (\int_I |f|^p dx)^{1/p} + (\int_I |g|^p dx)^{1/p}$

Beweis: p=1: Dreiecksungleichung. p>1: Folgt aus HÖLDER.

.... Beachte

$\|\cdot\|_p: L^p(I) \to R$: $\|f\|_p := (\int_I |f|^p\, dx)^{1/p}$ ist Halbnorm.

(1) $\|f\|_p \ge 0$. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f=0$ f.ü.

(2) $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\, \|f\|_p$

(3) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ Dreiecksungleichung, MINKOWSKI

Zur Norm fehlt: $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f=0$ überall. Gilt für stetige Funktionen.

Äquivalenzrelation auf $L^p(I)$: $f \sim g \Leftrightarrow f=g$ f.ü.

34.5 .... Vereinbarung

In $L^p(I)$-Theorie alle Funktionen einer Klasse identifizieren. $L^p(I)$=LR aller Äq.-Klassen

$\Rightarrow \|f\|_p$ wird Norm

34.6 .... Hilfssatz

$g_n \in L^p(I)$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p < \infty$ (konvergent). $\Rightarrow \exists\, s \in L^p(I)$, $\lim \|s-\Sigma g_n\|_p = 0$

$\Rightarrow s = \Sigma g_n$ im Sinne der $L^p(I)$-Norm.

Beweis: ---

34.7 .... Satz

CAUCHY-Konvergenzbedingung im $L^p(I)$

34.8 .... Bemerkungen, Spezialfall „p=2"

$f,g \in L^2(I) \Rightarrow f \cdot g \in L^1(I)=L(I)$ nach HÖLDER. $\Rightarrow \exists \int_I fg\,dx$.

Abbildung $L^2 \times L^2 \to R$, $(f,g) \to (f|g) := \int_I fg\,dx$ ist Innenprodukt, Skalarprodukt auf L^2.

Erzeugt die $\|\cdot\|_2$-Norm: $\|f\|_2 := \sqrt{(f|f)}$.

$|(f|g)| \le \|f\|_2\, \|g\|_2$, CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (CSU)

$(L^2, (\cdot|\cdot))$ ist Innenproduktraum und wegen 34.7 (CAUCHY) ein HILBERT-Raum.

Kapitel IX. Normierte Lineare Räume, der R^p

§35 .... Topologische Grundlagen

35.1 .... Definition

p-dimensionaler Euklidischer Raum. Addition, skalare Multiplikation $\Rightarrow R^p$ Vektorraum

Innenprodukt, Norm $\|\cdot\|_2$ (EUKLID-Norm), Orthogonalität, Einheitsvektor, kanonische Basis

35.2 .... **Bemerkung**
Spalten-Notation

35.3 .... **Eigenschaften des Innenproduktes**
$x\cdot x\geq 0$ für $x\neq 0$. $(\alpha x+\beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz)$, $x0=0$, $|xy|\leq\|x\|_2\,\|y\|_2$ CSU

35.4 .... **Eigenschaften der Euklid-Norm**
(1) $\|f\|_2\geq 0$. $\|f\|_2=0 \Leftrightarrow f=0$ f.ü.
(2) $\|\alpha f\|_2 = |\alpha|\,\|f\|_2$
(3) $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ Dreiecksungleichung, CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

35.5 .... **Definition**
E Vektorraum über Körper R mit Abbildung $\|\cdot\|$ mit obigen Eigenschaften =>
Normierter Linearer Raum

35.6 .... **Beispiele**
$(R^p, \|\cdot\|_2)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$, $\|\cdot\|_p=(\int_I|f|^p dx)^{1/p}$, $(R, |\cdot|)$.

35.7 .... **Definition**
$U_\varepsilon(x) = \{y \mid \|x-y\|<\varepsilon\}$ ε-Kugel
Beschränkte Menge: $S \subset U_r(0)$
Folge, CAUCHY-Folge

35.8 .... **Satz**
Konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert

35.9 .... **Satz**
Konvergente Folge ist beschränkt

35.10 .... **Satz**
Jede Teilfolge einer gegen x konvergenten Folge konvergiert gegen x.

35.11 .... **Satz**
Linearität des lim.

35.12 .... **Definition**
NLR E heißt vollständig bzw. BANACH-Raum <=> Jede Cauchy-Folge aus E konvergiert gegen ein Element von E

35.13 .... **Beispiele**
Fast alle bekannten NLRs vollständig, bis auf $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$

35.14 .... **Hilfssatz**
$(x^{(n)})$ Folge, bzgl. $\|\cdot\|_1$ beschränkt. => Teilfolgen $(x^{(n')})$, die komponentenweise gegen GW.
=> Konvergenz gegen GW bzgl. jeder Norm (Abschätzen durch 1-Norm)

35.15 .... **Hilfssatz**
$\|\cdot\|$ bel. Norm => $\exists\ \alpha, \beta>0$ mit $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_1$.

35.16 .... **Definition**
Normen äquivalent <=> $\lambda\|x\| \leq |||x||| \leq \mu\|x\|$
Äquivalente Normen erzeugen selben Konvergenzbegriff. $\lim \|x_n-x\|=0 \Leftrightarrow \lim |||x_n-x|||=0$

35.17 .... **Satz**
(a) Alle Normen auf R^p äquivalent
(b) Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz
(c) R^p bzgl. jeder Norm BANACH-Raum
Beweis: (a) $\alpha_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta_1\|x\|_1$ und $\alpha_2\|x\|_1 \leq |||x||| \leq \beta_2\|x\|_1$ zusammenbauen.
(b) nach Maximumsnorm, (c) $\|\cdot\| \Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ => Komponentenweise zusammensetzen

35.18 .... Satz „Bolzano-Weierstrass“

Jede beschränkte Teilfolge in R^p besitzt konvergente Teilfolge.

Beachte: Nicht in beliebigen normierten Räumen!

35.19 .... Definition

Punktierte ε-Umgebung, innerer Punkt, Offene Menge, Abgeschlossene Menge, Häufungspunkt, Abgeschlossene Hülle, Isolierter Punkt, Rand, Randpunkt

35.20 .... Satz

S abgeschlossen <=> $H(S) \subset S$ <=> S = S Abschluß

35.21 .... Satz

ε-Umgebung offene Menge

35.22 .... Satz

Vereinigung [Durchschnitt] beliebig vieler offener [abgeschl.] Mengen offen [abgeschl.]
Durchschnitt [Vereinigung] endlich vieler offener [abgeschl.] Mengen offen [abgeschl.]

Endlich: Durchschnitt offen, Vereinigung abgeschl. Beliebig: Durchschnitt abgeschl., Vereinigung offen.

35.23 .... Satz

Es gibt immer Folge, die gegen Häufungspunkt konvergiert.

35.24 .... Bemerkung

Nur „puntierte ε-Umgebung“ Normabhängig!

35.25 .... Satz „Bolzano-Weierstrass“

Jede unendliche, beschränkte Teilmenge $S \subset R^p$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt

35.26 .... Definition

Durchmesser $d(M) := \sup\{ \|x-y\| \}$

35.27 .... Schachtelungsprinzip

$\ldots \subset M_2 \subset M_1$ Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit $\lim d(M_k) = 0 \Rightarrow \exists$ genau ein x aus Durchschnitt

35.28 .... Definition

Offene Überdeckung, Endliche Überdeckung, Kompaktheit

35.29 .... Beispiel

Abgeschlossener Quader kompakt.

Beweis: Schachtelung, irgendwann Widerspruch zur ε-Umgebung.

35.30 .... Satz

Kompakte Menge notwendig auch abgeschlossen und beschränkt.

35.31 .... Satz

M kompakt <=> M abgeschlossen und beschränkt <=> Jede Folge aus M besitzt konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M

Beweis: ---

§36 .... Stetige Abbildungen normierter linearer Räume

36.1 .... Beispiele

$L(I) \to R$: $Ax := \int_a^b x(t)dt$

$E \to R$: $Ax := \|x\|$

Matrixprodukt

36.2 .... **Definition**
A an x_0 (Häufungspunkt) Grenzwert $\Leftrightarrow$ $\exists\, y_0$ mit $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ mit $\|Ax-y_0\|<\varepsilon$.

36.3 .... **Beispiel**
Grenzwert des Integrals

36.4 .... **Satz**
Teilfolge gleichen Grenzwert

36.5 .... **Folgenkriterium**
A an x_0 (Häufungspunkt) Grenzwert $\Leftrightarrow$ Für jede gegen x_0 konv. Folge konvergiert (Ax_n).

36.6 .... **Satz**
Linearität des Grenzwertes.
In R (angeordnet) auch Ordnungserhaltend!

36.7 .... **Definition**
Stetigkeit: $\|Ax-Ax_0\|$, Stetigkeit auf S, Gleichmäßige Stetigkeit

36.8 .... **Beispiele**
Norm ist stetig, Integral glm. stetig

36.9 .... **Satz**
A in x_0 stetig $\Leftrightarrow$ Für jede gegen x_0 konvergente Folge gilt $Ax_n \to Ax_0$.

36.10 .... **Satz**
Stetigkeit linear.

36.11 .... **Satz**
Verkettung stetig, bei entsprechender Wahl der Definitionsbereiche.

36.12 .... **Definition**
Teilmenge $O \subset S$ S-Offen $\Leftrightarrow$ $\forall\, x\in O\ \exists\, \varepsilon>0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap S \subset O$

36.13 .... **Satz**
O S-Offen $\Leftrightarrow$ $\exists$ offene Menge G mit $O = G \cap S$

36.14 .... **Satz**
A stetig in S $\Leftrightarrow$ Urbild $A^{-1}(G)$ jeder offenen Menge G stets S-Offen.
Beweis: =>: $x\in A^{-1}(G) \Rightarrow Ax\in G$. $U_\varepsilon\subset G \Rightarrow A(U_\delta(x)\cap S)\subset U_\varepsilon(Ax) \Rightarrow U_\delta(x)\cap S \subset A^{-1}(U_\varepsilon(Ax))$
$\subset$
$A^{-1}(G)$ <=: $x\in A^{-1}(U_\varepsilon(Ax)) \Rightarrow U_\delta(x)\cap S \subset A^{-1}(U_\varepsilon(Ax))$, da S-Offen. $\Rightarrow A(U_\delta(x)\cap S) \subset$
$U_\varepsilon(Ax)$

36.15 .... **Satz** **Ansage!**
Stetiges Bild kompakter Menge kompakt
Beweis: Sei endliche Überdeckung gegeben. => $A^{-1}(G_i)$ S-Offen => $\exists$ offenes O mit
$A^{-1}(G_i) = O\cap S \Rightarrow S\subset A^{-1}(\bigcup G_i) = \bigcup A^{-1}(G_i)$ => Endlich viele reichen, da S kompakt =>
$A(S) \subset \bigcup A(O_i\cap S) \subset \bigcup G_j$, da $A(A^{-1}(G_i))\subset G_i$.

36.16 .... **Spezialfall p=1**
Stetige reellwertige Abbildung mit kompaktem Def-Bereich besitzt Max.- und Min-Stelle

36.17 .... **Satz**
Stetige Abbildung auf kompakter Menge glm. stetig.

36.18 .... **Satz „Banachscher Fixpunktsatz"**
A kontrahierende Selbstabbildung, d.h. $\|Ax-Ay\| \le q\, \|x-y\|$ mit q fest, $0<q<1$.
=> A besitzt genau einen Fixpunkt, d.h. $Ax=x$. Durch Iteration zu bestimmen
Beweis: $\|x_2-x_1\| = \|Ax_1-Ax_0\| \le q\, \|x_1-x_0\|$. $\|x_{n+k}-x_n\| = \| \Sigma(x_{n+j}-x_{n+j-1}) \| \le q^n/(1-q)\, \|x_1-x_0\|$ CF.
=> (x_n) ist CF => $\lim x_n=x \in S$, da Banach-Raum. A stetig => $Ax=\lim Ax_n=\lim x_{n+1}=x$

36.19 .... Stetige lineare Abbildungen

A beschränkt <=> $\|Ax\| \le k\,\|x\|\ \ \forall\, x$. Achtung! Zwei verschiedene Normen!

Beachte: => A LIPSCHITZ-stetig und somit glm. stetig

36.19.1 .... Satz

A stetig <=> A beschränkt

Beweis: <=: s.o. =>: Indirekt. Ann: A nicht beschränkt => $\forall\, n\ \exists\, x_n$, $\|Ax_n\| \ge n\|x_n\|$. Sei $y_n := 1/n \cdot x_n/\|x_n\| \to 0$. => $\|Ay_n\| = 1/n\|x_n\| \cdot \|Ax_n\| > 1$, Widerspruch zur Stetigkeit!

36.19.2 .... Satz und Definition

Abbildungsnorm von A: $\|A\| := \inf\{\, k>0 : \|Ax\| \le k\|x\|\ \forall\, x\,\}$. Norm auf $\mathcal{L}(E,F)$:=

Linearer Raum aller stetigen/beschränkten linearen Abbildungen A: $E \to F$

=> $\|A\| = \sup\{\, \|Ax\| \mid \|x\| \le 1\,\} = \sup\{\, \|Ax\|/\|x\|,\ x \ne 0\,\}$

Beweis: (a) Normaxiome nachprüfen! (b) Gegenseitiges Abschätzen: $\|A\| \ge M_1 \ge M_2 \ge \|A\|$

36.19.3 .... Beispiel

$Ax = \int_a^b x(t)dt$ linear und stetig. $|Ax| \le \int_a^b |x(t)|dt = \|x\|_1$ => $\|A\| \le 1$

§37 .... Stetige Funktionen aus R^p nach R^q

.... Schreibweisen

f_k: k-te Komponentenfunktion. Konvergenz <=> komponentenweiser Konvergenz.

37.1 .... Satz

$\lim f(x) = b = (b_1,\dots,b_q)$ <=> $\lim f_k(x) = b_k$.

37.2 .... Satz

f stetig in a <=> f_k stetig in a <=> $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta\ \ |f(a) - f(x)| < \varepsilon$ mit Maximumsnorm

37.3 .... Beispiele

Koordinatenfunktionen (Projektionen) stetig

$xy/(x^2+y^2)$ stetig bis auf (0,0). Folgenkriterium, $(1/n, 1/n) \to 0$, $f(1/n, 1/n) = 0$. Aber in (0,0) bzgl. jeder Veränderlichen partiell stetig!

37.4 .... Satz

Jede lineare Abbildung A: $R^p \to R^q$ ist stetig.

Beweis: $\|Ax\| \le |x_1|\,\|Ae_1\| + \dots + |x_p\,\|Ae_p\| \le (\max \|Ae_k\|)\ \ \|x\|_1 = k\ \ \|x\|_1$

37.5 .... Normkonvergenz in $\mathcal{L}(R^p,R^q)$

($\mathcal{L}(R^p,R^q)$, $\|\cdot\|$ Abbildungsnorm) ist NLR.

Isomorphismus: Abbildungsmatrix zeilenweise in eine Zeile

Norm auf $\mathcal{L}(R^p,R^q)$ auch Norm auf $R^{p\cdot q}$ => Auf $\mathcal{L}(R^p,R^q)$ alle Normen äquivalent

Kapitel X. Differentialrechnung im R^p

§38 .... Partielle Ableitungen

38.1 .... Definition

f in a partiell nach x_k diffbar <=> Partielle Fkt. $x_k \to f(a_1,\dots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\dots,a_p)$ in $x_k = a_k$ diffbar.

Bezeichnung: $\alpha_k = D_k f(a) = \partial f/\partial x_k\ (a) = \partial f(a)/\partial x_k = f_{xk}(a)$ partielle Ableitungen

f partiell diffbar auf S <=> $D_k f(a)$ ex. $\forall\, a$, $\forall\, k$.

.... **Bemerkungen**
S offen => $\exists\, U_\varepsilon(a) \subset S$ (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ε-Würfel) => Partielle Funktion in ε-Umgeb. def.

38.2 .... **Beispiele**
$f(x)=\|x\|_2$ diffbar.

38.3 .... **Definition**
f 2mal partiell diffbar.
Bezeichnung: $D_jD_kf(x)$
Induktion: Partielle Ableitungen k-ter Ordnung
k-mal stetig partiell diffbar

38.4 .... **Satz von Schwarz**
$f \in \mathbf{C^2(S)}$. => $D_kD_jf(a) = D_jD_kf(a)$
Beweis: --- 2 Seiten

38.5 .... **Folgerung**
Für $f \in C^k(S)$ sind die partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation

38.6 .... **Definition**
Vektor grad $f(x) := (D_1f(x), ..., D_pf(x))$ Gradient von f im Punkt x

38.7 .... **Geometrische Interpretation**
Graph von $f: R^2 \to R$ als Fläche. D_1f bzw. D_2f geben Steigung der Tangentialebene in x bzw. y-Richtung an.

§39 .... *Änderungsverhalten von C^1-Funktionen*

.... **Allgemeines, $S=R^2$, $f: S \to R$**
$h=(h_1,h_2)$, $\|h\|_\infty<\varepsilon$ => $a+h \in U_\varepsilon(x) \subset S$.
$\Delta f := f(a+h)-f(a) = (f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2+h_2)) + (f(a_{11},a_2+h_2) - f(a_1,a_2))$
Beide aus $U_\varepsilon(a)$. => $\exists$ stetig diffbare Fkt. $x_1 \to f(x_1,a_2+h_2)$, $x_2 \to f(a_1,x_2)$. MWS 21.4 auf beide angewandt => $\Delta f = D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2 + r(h_1,h_2)$. => $r(h)/\|h\|_1 \to 0$ => $r(h)/\|h\| \to 0$
Allgemein: $\Delta f=D_1f(a)h_1 + ... + D_pf(a)h_p + r(h)$, $r(h)/\|h\| \to 0$.
Noch allgemeiner: $R^p \to R^q$:

39.1 .... **Satz**
$S \subset R^p$, offen. $f: S \to R^q$ C^1-Fkt.. $A=(D_1f_1(a) ... ... D_pf_q(a))$, (q,p)-Matrix. => $f(a+h)-f(a) = Ah + r(h)$ mit $r(h)/\|h\| \to 0$

39.2 .... **Geometrische Interpretation**
Gleichung der Tangentialebene an einem Punkt mit Fehler r(x-a). r(x-a) im Vergleich zu $\|x-a\|$ klein.
$D_1f(x_1-a_1) + D_2f(x_2-a_2) - (x_3-a_3)=0$. Normalenvektor $n:=(D_1f, D_2f, -1)/\sqrt{(D_1f)^2+(D_2f)^2+1}$

§40 .... *Differenzierbare Funktionen*

40.1 .... **Definition**
f in Punkt a diffbar <=> $\exists$ (q,p)-Matrix A mit $f(a+h) - f(a) = A\,h + r(h)$, $r(h)/\|h\| \to 0$

40.2 .... Satz und Definition

f in a diffbar => Jede Komponentenfunktion in a nach allen p Variablen diffbar.
(q,p)-Matrix eindeutig bestimmt (JACOBI-Matrix, Funktionalmatrix von f): Ableitung von f
Beweis: Jede Komponentenfunktion darstellen, $t \cdot e_k$ =: h. $\alpha_{jk} := D_k f_j(a)$ eindeutig

40.3 .... Bemerkungen

(a) $\exists$ eindeutige bijektive Abbildung zwischen Matrix und Linearer Abbildung
(b) Ableitung f '(a) für jedes a eine lineare Abbildung. $\|f'(a)\,h\| \le \|f'(a)\|\,\|h\|$ nach 36.19

40.4 .... Satz

f diffbar in a => f stetig in a
Beweis: $\|f(a+h)-f(a)\| \le \|f'(a)h\| + \|r(h)\| \le (\|f'(a)\| + \|r(h)\|/\|h\|)\,\|h\| \le M\,\|h\| \to 0$

40.5 .... Satz (Hinreichendes Kriterium für Existenz der Ableitung

f diffbar auf S <= $f \in C^1(S, R^q)$
Beweis: 39.1.

Kriterium nicht notwendig. Existenz der JACOBI-Matrix bedeutet keine Diffbarkeit - nur, daß Komponentenfunktionen partiell diffbar.

40.6 .... Verfahren zur Untersuchung der Diffbarkeit

Jacobi existiert und
$r(h) := f(a+h)-f(a)-J_f(a)h \to 0$

40.7 .... Beispiele

f(x)=c => f '(a)=0 Nullmatrix
f linear => f '(a) = A = $J_f(a)$, f '(a) = f
Beachte: **$f'(a)$: $R^p \to R^q$: $x \to f'(a)\,x$**
f': $R^p \to \mathcal{L}(R^p,R^q)$, $a \to f'(a)$

40.8 .... Spezialfall „p=1, q∈N“

Äquivalente Aussagen:
(a) f in a diffbar
(b) Jede Komponentenfunktion in a diffbar
(c) lim ((f(a+h)-f(a))/h existiert (h∈R beachten! Nur daher Differenzenquotient!)

40.9 .... Spezialfall „p∈N, q=1“

$f'(a) = (\,D_1 f(a), D_2 f(a), ..., D_p f(a)\,)$ =: A lineares Funktional
Vereinbarung: f '(a) = grad f(a) Spaltenvektor. grad f: $S \to R^p$ ist Vektorfeld
Beachte: grad f(a) kann existieren, ohne daß f in a diffbar ist!
Bezeichnung: $dx = (dx_1, ..., dx_p)$ Differential der unabhängigen Veränderlichen
$df := (\text{grad } f(x)) \cdot dx = \Sigma\, D_j f(x) \cdot dx_j$ das totale Differential von f an x,
Approximiert das Inkrement beliebig gut, wenn nur $\|dx\|$ hinreichend klein

40.10 .... Satz und Definition

Abbildung f ': $x \to f'(x) \in \mathcal{L}(R^p,R^q)$ stetig <=> $f \in C^1(S, R^q)$
Beweis: Folgenkriterium.

§41 .... Differentiationsregeln

41.1 .... Satz

Linearität der Differentiation
Beweis: Über Inkrement- und Restbetrachtung

41.2 .... **Satz „Kettenregel“**

g diffbar in x, f diffbar in y=g(x). => fog diffbar in x mit $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ **Matrixprod.**

Beweis: $(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)=f(g(x+h))-f(g(x)) = f'(g(x))\cdot(g(x+h)-g(x)) + r(g(x+h)-g(x))$

Dabei $g(x+h)-g(x) = g'(x)\cdot h + r_2(h)$. Dann Restbetrachtung

41.3 .... **Spezialfall „p=1, q∈N, r=1“**

$(f\circ g)'(x) = (D_1f(g(x)), ..., D_pf(g(x))) \cdot (g_1'(x), .., g_q'(x))$

41.4 .... **Spezialfall „p,q ∈ N, r=1“**

41.5 .... **Satz**

f, g: S→R diffbar.

(a) => $f\cdot g$ diffbar mit $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

(b) $g(x)\neq 0$ => f/g diffbar mit $(f/g)'(x) = ((g(x)f'(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$

Beweis: F: $R^2\to R$, $F(y_1,y_2):=y_1y_2$. G: $R^p\to R^2$, $G(x):=(f(x),g(x))$. => fg = FoG

=> $(fg)'(x)=F'(G(x)) \cdot G'(x)$. Dabei $F'(y) = (y_2,y_1)$, $G'(x)=(D_1f(x), ..., D_pf(x)$ \n, $D_1g(x), D_pg(x)) = (f'(x)\ \ g'(x))$. => Beh.

41.6 .... **Definition**

ν Richtungsvektor, $\|\nu\|_2=1$

Falls existiert: $D_\nu f(x) := \partial f(x) / \partial\nu = \lim (f(x+t\nu)-f(x))/t$ Richtungsableitung

41.7 .... **Satz**

f in x diffbar => ∃ Richtungsableitung für jeden Richtungsvektor.

$D_\nu f(x) = f'(x)\,\nu = \nu \cdot \text{grad } f(x)$

Beweis: $(f(x+t\nu)-f(x))/t = (f'(x)t\nu + r(t\nu))/t = f'(x)\,\nu + r(t\nu)/t = f'(x)\nu + r(t\nu)/\|t\nu\|_2 \to f'(x)\nu$

41.8 .... **Bemerkung**

$|D_\nu f(x)| = |(\text{grad } f(x)) \cdot \nu| \leq$ (CSU) $\|\text{grad } f(x)\|_2\, \|\nu\|_2 = \|\text{grad } f(x)\|_2$

=> $\nu_0 := (\text{grad } f(x)) / \|\text{grad } (x)\|_2$ Richtungsvektor mit $D_{\nu 0} f(x) = \nu_0 \text{ grad } f(x) = \|\text{grad } f(x)\|_2>0$

=> grad f(x) Richtung des stärksten Anstiegs

.... **Beachte**

Aus Existenz aller Richtungsableitungen folgt **nicht** die Diffbarkeit! (Üb. 111)

§42 .... Mittelwertsätze

42.1 .... **Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen**

f: S→R, x+th∈S ($0\leq t\leq 1$). f db. auf S. => $\exists\, \delta \in (0,1)$, $f(x+h)-f(x)=f'(x+\delta h)\cdot h=h\cdot\text{grad } f(x+\delta h)$

Beachte: $|f(x+h)-f(x)| \leq$ (CSU) $\|\text{grad } f(x+\delta h)\|_2\, \|h\|_2$.

Beweis: $g(t):=x+th$, $g'(t)=h$. => $F:=(f\circ g)$, $F'(t)=f'(g(t))\cdot g'(t)=f'(x+th)\cdot h = h \cdot \text{grad } f(x+th)$

MWS 21.4: $\exists\, \delta \in (0,1)$, $F(1)-F(0) = f(x+h)-f(x) = F'(\delta)\cdot 1 = h \text{ grad } f(x+\delta h)$

.... **Bemerkung**

Für vektorwertige Funktionen gibt es **keinen solchen Satz!**

Jede Komponente einzeln, aber i.A. nicht zusammenfaßbar.

42.2 .... **Definition und Satz**

f: $[a,b]\to R^q$ komponentenweise R-Intbar, Zwischenvektor Z, Zwischenvektor τ.

=> $S(f,Z,\tau) := \Sigma f(\tau_k)\,(t_k-t_{k-1}) \in R^q$ RIEMANN-Summe von f. Zerlegungsnullfolge => Komponentenweise Integration.

Beweis: Normkonvergenz <=> komponentenweiser Konvergenz.

42.3 .... **Folgerung**

$[a,b] \to \mathcal{L}(R^p, R^q)$, $t \to (\alpha_{jk})$

A matrixwertige Funktion (α's sind Funktionen von t, einzeln R-Intbar)

=> $\int_a^b A(t)dt = \int_a^b (\alpha_{jk}(t))dt = (\int_a^b \alpha_{jk}(t)dt)$, komponentenweise Integration

Beweis: $\mathcal{L}(R^p, R^q)$ isomorph zu R^{pq}.

42.4 .... **Bemerkung**

$\int_a^b A(t)\cdot h\, dt = ... = (\int_a^b A(t)dt) \cdot h$

42.5 .... **Satz „Dreiecksungleichung“**

$[a,b] \to R^q$ stetig. => $\|\int_a^b f(t)dt\| \le \int_a^b \|f(t)\|\, dt$

Beweis: Über RIEMANN-Summe, dort Dreiecksungleichung

42.6 .... **MWS für vektorwertige Funktionen**

f: $S \to R^q$ C^1-Funktion. x, $x+th \in S$ bei $0 \le t \le 1$. =>

$f(x+h) - f(x) = (\int_0^1 f'(x+th)\, dt) \cdot h$. (q,p)-Matrix auf h angewandt

Beweis: φ_j: $[0,1] \to R$, $\varphi_j(t)=f_j(x+th)$. => $f_j(x+h)-f_j(x)=\varphi_j(1)-\varphi_j(0) = \int_0^1 \varphi_j'(t) = \int_0^1 (f_j'(x+th)\cdot h)dt$

42.7 .... **Folgerung**

$M:= \sup_{0\le t\le 1} \| f'(x+th) \| < \infty$ Abbildungsnorm. => $\|f(x+th)-f(x)\| \le M\, \|h\|$

42.8 .... **Definition**

S zusammenhängend (Je zwei Punkte durch Polygonzug verbindbar)

Gebiet: Offen und zusammenhängend

Konvex: Alle Verbindungsstrecken innerhalb.

42.9 .... **Satz**

S Gebiet, f: $S \to R^q$ mit $f'(x)=0\ \forall\, x$. (d.h. alle partiellen Ableitungen existieren und =0)

=> f konstant auf S

Beweis: Polygonzug, für jeden Abschnitt MWS.

42.10 .... **Beispiel**

$f(x,y)= \arctan(x/y) + \arctan(y/x)$

§43 .... Satz von TAYLOR

43.1 .... **Satz von TAYLOR**

$S \subset R^p$, S offen, $f \in C^{n+1}(S,R)$. $x=(x_1,x_2)$, $h=(h_1,h_2)$, $x+th \in S$ bei $0 \le t \le 1$ => $\exists\, \delta$, $0<\delta<1$ mit

$f(x+h) = f(x) + \Sigma_{\nu=1}^n 1/\nu!\ (h_1D_1+...+h_pD_p)^\nu f(x) + 1/(n+1)!\ (h_1D_1+...+h_pD_p)^{n+1} f(x+\delta h)$

Beweis: Nur für p=2 gezeigt. $\varphi(t):=f(x+th)$. Induktion: $\varphi^{(m)}(t)=(h_1D_1+h_2D_2)^m f$. Dann TAYLOR.

.... **Spezialfall „n=0“**

=> MWS 42.1

43.2 .... **Spezialfall „p=2“**

$f(x+h,y+k) = f(x,y) + h\, D_1f(x,y) + k\, D_2f(x,y) + 1/2$ .... (Binom)

43.3 .... **Spezialfall „p=3“**

43.4 .... **Satz**

$f \in C^2(S,R)$. $U=U_\varepsilon(x)$ mit $U \subset S$.

=> $\forall$ h mit $x+h \in U$: $f(x+h) = f(x)+f'(x)\cdot h + 1/2\ \Sigma_{j,k=1}^p D_jD_kf(x)h_jh^k + \|h\|^2\rho(h)$

Quadratische Form mit $\rho(h) \to 0$

Beweis: Taylor für n=1. Von Summe Rest abspalten: R(h), $R(h)/\|h\|_2^2 \to 0$. $\rho(h)=R(h)/\|h\|^2$

§44 .... *Implizite Funktionen*

.... Problemstellung

Isobaren. Wann gibt es zu jedem $x \in U_\delta(a)$ genau ein $y \in U_\varepsilon(b)$ mit $F(x,y)=c$?

=> $F(x,f(x))=c$. f auf $U_\delta(a)$ implizit durch $F(x,f(x))$ definiert.

Bezeichnungen: x- und y-Vektor übereinander, $\in R^{p+q}$. Kartesisches Produkt von G und H

G,H offen => $G\times H$ offen

44.1 .... Definition

F: $G\times H\to R^q$, C^1, $G\subset R^p$, $H\subset R^q$

Gleichung F(x,y) auf G nach y auflösen <=> Finde f: $G\to R^q$ mit $F(x,f(x))=0\ \forall\ x\in G$

In Komponentenschreibweise: $F_1(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)=0$, ..., $F_q(x_1,...,x_p,y_1,...,y_p)=0$.

q Gleichungen für q Unbekannte, (nicht unbedingt lineares) Gleichungssystem

Hier q Funktionen f_j: $G\to R$ zu finden.

44.2 .... Satz über implizite Funktionen, *Spezialfall „p=q=1“*

$P:=(a_1,a_2)\times(b_1,b_2) \subset R^2$ ein Rechteck. F: $P\to R$ C^1-Fkt. $\exists\ (a,b)\in R$ mit $F(a,b)=0$, $D_2F(a,b)\neq 0$

(a) => $\exists\ U=U_\delta(a) \subset (a_1,a_2)$, $V=U_\varepsilon(b) \subset (b_1,b_2)$,

genau eine stetige Fkt. f: $U\to V$ mit $f(a)=b$, $F(x,f(x))=0\ \forall\ x\in U$.

Für jedes feste $x\in U$ ist $f(x)\in V$ die einzige in V liegende Lsg. von $F(x,y)=0$

$F(x,y)=0$ ist im Punkt (a,b) lokal nach y auflösbar, f implizit gegeben

(b) => f: $U\to V$ in $a\in U$ diffbar, $f'(a)= - D_1F(a,b) / D_2F(a,b)$.

f '(a) berechenbar, ohne f explizit zu kennen

Beweis: $0=F(x,f(x))$ im Punkt a nach Kettenregel diff. $=D_1F(a,b)1 + D_2F(a,b)f'(a)$

(c) F: $P\to R$ C^k-Funktion => $\exists\ U_1=U_{\delta 1}(a) \subset U$ mit f: $U_1\to R$ ebenfalls C^k-Funktion

Berechnung wie oben. Produkt- und Kettenregel

Beweis: Siehe 46.4

44.3 .... Beispiele

Nicht explizit auflösbare Funktion. Nur Maxima/Minima erfaßbar.

.... Allgemeiner Fall

F: $G\times H\to R^q$: $(x\ \ y) \to F(x_1,...,x_p,y_1,...,y_p)$ C^1-Funktion

Setze $D_xF := (\partial F_1/\partial x_1 \ldots \partial F_1/\partial x_p, \ \ldots, \ \partial F_q/\partial x_1 \ldots \partial F_q/\partial x_p)$ (q,p)-Matrix

Setze $D_yF := (\partial F_1/\partial y_1 \ldots \partial F_1/\partial y_p, \ \ldots, \ \partial F_q/\partial y_1 \ldots \partial F_q/\partial y_p)$ **(q,q)**-Matrix, $\in \mathcal{L}(R^q,R^q)$

$\det(D_yF(x,y)) \neq 0$ <=> $D_yF(x,y)$ bijektiv => invertierbar

44.4 .... Hauptsatz über Implizite Funktionen

F: $G\times H\to R^q$ C^1, $a\in G$, $b\in H$ Vektoren mit $F(a,b)=0$ und $D_yF(a,b)$ an Stelle (a,b) invertierbar.

(a) => $\exists\ U=U_\delta(a) \subset G$, $V=U_\varepsilon(b) \subset H$,

genau eine stetige Fkt. f: $U\to V$ mit $f(a)=b$, $F(x,f(x))=0\ \forall\ x\in U$.

Für jedes feste $x\in U$ ist $f(x)\in V$ die einzige in V liegende Lsg. von $F(x,y)=0$

$F(x,y)=0$ ist im Punkt (a,b) lokal nach y auflösbar, f implizit gegeben

(b) => f: $U\to V$ in $a\in U$ diffbar, $f'(a)= - (D_yF(a,b))^{-1} \cdot D_xF(a,b)$.

(c) F: $P\to R$ C^k-Funktion => $\exists\ U_1=U_{\delta 1}(a) \subset U$ mit f: $U_1\to R$ ebenfalls C^k-Funktion

Beweis: Mit BANACHschem Fixpunktsatz. $D:=D_yF(a,b)$. $F(x,f(x))=0$ => $D^{-1}F(x,f(x))=0$

=> $f(x) - D^{-1}F(x,f(x)) = f(x)\ \forall x\in U$. => f Lösung eines Fixpunktproblems

$(Ag)(x):=g(x)-D^{-1}F(x,g(x))$

44.5 .... Praktische Bestimmung von f '(a)

Vorr. => $D_yF(a,b)\ f'(a) = -D_xF(a,b)$ => $(q,q) \cdot (q,p) = (q,p)$ => LGS, q Gleichungen,

q partielle Ableitungen gesucht => CRAMERsche Regel

Beachte: Auch durch Kettenregel, f auf U_1 diffbar nach 44.4

44.6 .... **Spezialfall „p=2, q=1“ (Niveau-Flächen)**

C^1-Funktion F: $R^3 \to R$. $F(x,y,z)=0$ => $\exists$ f mit $F(x,y,f(x,y))=0$?
=> $\exists$ U, V wie oben, dort genau ein f C^1 auf U_1.
$f'(x,y) = (D_1f(x,y), D_2f(x,y)) = -(D_3F(x,y,f(x,y))^{-1}\cdot(D_1F(x,y,f(x,y), D_2F(x,y,f(x,y)) = R \cdot R^2$.
Tangentialebene: ... => $(\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$.

44.7 .... **Umkehrsatz**

$S\subset R^p$, f: $S\to R^p$ **C^1**-Vektorfeld, $f(a)=b$
$f'(a)$ invertierbar => $\exists$ offene Umgebung W von a, $V=U_\varepsilon(b)$ mit f: $W\to V$ **bijektiv**.
Umkehrfunktion g: $V\to W$ von $f|_W$ dann ebenfalls C^1-Fkt., $g'(b)=(f'(g(b)))^{-1}=(f'(a))^{-1}$.
Beachte: Nur lokale Umkehrbarkeit von f auf evtl. sehr kleiner Umgebung von A.
Idee: $f(x)-y=0$ nach x auflösbar. $F(x,y):=f(x)-y$ ist C^1, $D_xF(a,b)=f'(a)$ invertierbar.

44.8 .... **Beispiel**

44.9 .... **Satz**

$S\subset R^p$. f: $S\to R^p$ C^1-Vektorfeld. $f'(x)$ für jedes $x\in S$ invertierbar
=> (a) f offene Abbildung, d.h. für $H\subset S$ offen ist auch f(H) offen
=> (b) $x\to\|f(x)\|$ besitzt **kein** Maximum
=> (c) f injektiv => $\exists$ Umkehrfunktion f^{-1}, ebenfalls C^1-Funktion (Beachte: f(S) offen!)
Beweis: (a) Umkehrsatz auf $f|_H$: $\exists$ offenes W mit $f(W)=U_\varepsilon(b)$ offen. $f(W)\subset f(H)$
(b) Ann.: $a\in S$ Maximalstelle, => $\|f(x)\|\le\|f(a)\|$ $\forall$ x => $\|f(a)\|\neq 0$. Umkehrsatz => Umgebung um a legen. (c) Umkehrsatz: Für jedes b lokal umkehrbar zu C^1, damit auch global

44.10 .... **Maximumsprinzip** **Ansage**

$S\subset R^p$ offen und **beschränkt**. f C^1 auf S, auf Abschluß stetig. $f'(x)$ für jedes $x\in S$ invertierbar.
=> $x\to\|f(x)\|$ auf **Abschluß von S** besitzt Maxiumum. Wird nur auf dem Rand angenommen
Beweis: Abschluß kompakt. Stetiges Bild kompakt => Maximum. Nach (b) nicht im Inneren

§45 .... Lokale Extrema

45.1 .... **Definition**

$S\subset R^p$, f: $S\to R$. f in a lokales Maximum/Minimum <=> $\exists$ $U_\delta(a)$ mit $f(x)\le/\ge f(a)$ $\forall$ $x\in U_\delta\cap S$.
Gilt sogar $f(x)</>f(a)$ auf punktierter Umgebung => Maximum/Minimum im engeren Sinne

45.2 .... **Satz**

f in a lokales Extremum und partiell diffbar nach allen p Variablen => grad f(a)=0
Beweis: g_k definieren, alle fix bis auf eine Komponente. Extremum => $g_k'=0$
Beachte: Nicht hinreichend. Kritische Stellen. Rand kann auch lokale Extrema enthalten!

45.3 .... **Definition**

A symm. (p,p)-Matrix. $Q_A(x):=(A\cdot x)\cdot x = \Sigma\alpha_{jk}x_jx_k$ durch A erzeugte quadratische Form.
positiv definit: $Q_A(x)>0$ $\forall$ $x\in R^p$, $x\neq 0$
negativ definit: $Q_A(x)<0$ $\forall$ $x\in R^p$, $x\neq 0$
indefinit: $Q_A(x)<0<Q_A(y)$ für ein paar (x,y)

45.4 .... **Hilfssatz**

Symm. A positiv/negativ definit <=> $\exists$ $\alpha>0$ mit $Q_A(x)\ge\alpha\|x\|^2$ bzw. $\le -\alpha\|x\|^2$ $\forall$ $x\in R^p$
Beweis: =>: Definiere Einheitssphäre. Als Urbild von {1} kompakt und abgeschlossen. => $\exists$ Minimalstelle α. $1/\|x\|^2 Q_A(x)=Q_A(x/\|x\|)\ge\alpha$ <=: $\|\cdot\|^2>0$, klar.

45.5 .... Satz „Extremwertkriterium“

$S \subset R^p$ offen, f: $S \to R$ C^2-Funktion, grad f(a)=0 (bei a kritische Stelle).
$H_f(a) := (D_j D_k f(a))_{j,k}$ die HESSEsche Matrix im Punkt a. (Symmetrisch nach SCHWARTZ)
=> (a) $H_f(a)$ pos. def. => f in a lokales Minimum im engeren Sinne. (1-dim: f '' >0)
=> (b) $H_f(a)$ neg. def. => f in a lokales Maximum im engeren Sinne. (1-dim: f '' <0)
=> (c) $H_f(a)$ indef. => f in a kein lokales Extremum
Beweis: $(f(a+h)-f(a))/\|h\|^2$ nach TAYLOR. Restglied als quadratische Form auffassen, α aus Hilfssatz wählen, abschätzen.

45.6 .... Spezialfall „p=2“

f: $(x,y) \to f(x,y) \in R$. C^2-Funktion, grad $f(x_0,y_0)=0$.
$\Delta=\det A=D_1^2 f(x_0,y_0)\, D_2^2 f(x_0,y_0) - (D_1D_2\, f(x_0,y_0))^2$
(a) $D_1^2>0$, $\Delta>0$ => f lokales Minimum im engeren Sinne
(b) $D_1^2<0$, $\Delta>0$ => f lokales Maximum im engeren Sinne
(c) $\Delta<0$ => f kein lokales Extremum
Beweis: Definitheit prüfen

45.7 .... Beispiele

§46 .... Extrema mt Nebenbedingungen

46.1 .... Definition

$S \subset R^p$, f: $S \to R$, g: $S \to R^q$ mit q<p.
f in a lokales Maximum/Minimum unter der Nebenbedingung g(x)=0
<=> $a \in M:=\{x \in S: g(x)=0\}$ und $\exists\, U_\delta(a)$ mit $f(x) \leq / \geq f(a)\ \forall\, x \in U\delta(a) \cap S \cap M$

46.2 .... Beispiele

Temperaturverteilung im Raum. Größte und kleinste Temp. auf vorgegebener Raumkurve.

46.3 .... Bemerkung

Nebenbedingung liefert q Gleichungen. Manchmal einzeln explizit q Variablen berechenbar, dann Extrema der neuen Funktion nach den restlichen Variablen suchen

46.4 .... Satz „LAGRANGEsche Multiplikatorenregel“

$S \subset R^p$ offen, f: $S \to R$ und g: $S \to R^q$ C^1-Funktion, $1 \leq q < p$. f besitze bei a lokales Extremum unter der Nebenbedingung g(x)=0. rang g'(a)=q.
=> $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ mit $f'(a) + \Sigma_{j=1}^{q}\, \lambda_j g_j'(a) = 0$. Die λ: LAGRANGEsche Multiplikatoren
Beachte: Als Gradienten interpretierbar, siehe geometrische Veranschaulichung. Gradienten parallel. Notwendige Bedingung!
Beweis: ---

46.5 .... Anwendung

- Gleichungssystem: $g_1(x)=0, \ldots, g_q(x)=0$.
  $D_1f(x)+\lambda_1 D_1 g_1(x)+\ldots+\lambda_q D_1 g_q(x)=0, \ldots, D_p f(x)+\lambda_1 D_p g_1(x)+\ldots+\lambda_q D_p g_q(x)=0$
- $x_1,\ldots,x_p$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ bestimmen
- Für diese $x_1,\ldots,x_p$ auf Extremum prüfen.
- Weitere $x_1,\ldots,x_p$ nur Extremum möglich, wenn g(a)=0 und rang g'(a) < q.

46.6 .... Zur Existenz von Extrema mit Nebenbedingung

M, die Nebenbedingungsmenge, kompakt => $f|_M$ besitzt Maximum und Minimum => f hat unter der Nebenbedingung globale und damit lokale Extrema. Der kleinste/größte Wert f(x) aus obigem Verfahren ist Lösung.

46.7 .... Beispiel

$R_A(x) := (x \cdot Ax) / x \cdot x$ RAYLEIGHsche Quotient von A.
$R_A(x) = R_A(\alpha x)$ => Extrema auf Sphäre $S=\{ x \cdot x = 1\}$. (Nebenbedingung)

Stichwortliste Analysis II

Unbestimmte Integrale	Zwischenwertsatz für Ableitungen (Betrachte $G(x) := F(x) - \lambda x$
	Integrationsregeln durch Differenzieren
Kompaktheit	Jede offene Überdeckung enthält endliche Überdeckung
	<=> Abgeschlossen und beschränkt (HEINE-BOREL)
	<=> Jede Folge aus M besitzt konv. Teilfolge mit GW in M
Stetigkeit	Lipschitz-Stetig => Gleichmäßige Stetig => Stetig
	Stetige Fkt. auf kompakter Menge ist glm. stetig
LEBESGUEsche Integrale	Treppenfunktionen, Linearität, L^+ kein LR.
	MWS der Integralrechnung
	Hauptsatz der Integralrechnung
MWS der Integralrechnung	Endliches Intervall, $m \le f(x) \le M$. => $m(b-a) \le .... \le M(b-a)$
Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung	$f \in C[a,b]$ kompakt, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ => F diffbar mit $F' = f$
	Bedeutung: Auf Kompaktum L-Integral ohne GW-prozesse
Konvergenzsätze	Wachsende L+ -F-Folge, Int-Folge beschr. $\rightarrow$ L+, gliedw.
	BEPPO LEVI: Monotone L F-Folge, Int.-Folge beschr. -> L, gliedw.
	L F-Folge, $\Sigma\int_a^b \lvert f_k \rvert dx$ konv. => Σf_k f.ü. gegen $f \in L$, gliedw.
	Interv-Aussch., Int-Folge beschr. (nicht konv!) $\rightarrow$ L,
	$\int_a^b f dx = \lim \int_a^b f dx$
	LEBESGUE: L F-Folge f.ü. konv, $\lvert f_n \rvert \le g \in L$ => $f \in L$, gliedw.
	Kleiner LEBESGUE: L F-Folge f.ü. konv, $\lvert f_n \rvert \le M$, I beschr. => L,
	gw.
	FATOU: Nichtneg. L F-Folge f.ü.$\rightarrow$f, Int-Folge bsr.=> L. **nicht**
	gw.
	F-Folge f.ü. gegen f, $\lvert f \rvert \le g \in L$ => $f \in L$, **nicht gliedw.**
Das unbestimmte Integral	Glättungseigenschaft,
	Partielle Integration
	Substitution I: I kompakt, $f \in L$, $g \in C^1$ injektiv ($g' \neq 0$).
	=> $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ mit $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$
	Substitution II: I kompakt, $f \in C$, $g \in C^1$, $g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$.
	(g nicht notwendig injektiv, dafür f stetig)
	Zweiter Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung
Zweiter Hauptsatz der Diff.- und Integralr.	**I kompakt**, F diffbar, F ' beschränkt auf I. => $F' \in L$,
	$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)dx$. Funktion aus Ableitung rekonstr.
Ober-, Unter-, RIEMANNsumme	f R-Integrabel: $\forall \varepsilon>0\ \exists Z$, $O(Z)-U(Z) < \varepsilon$
Uneigentliche Integrale	Absolute Konvergenz, Cauchy, Majorante/Minorante, Integral-
	kriterium für Reihen, Zusammenhang mit L-Integralen
CAUCHY für uneigentliche Integrale	$\lvert \int_a^b f\, dx \rvert < \varepsilon \quad \forall\, a,b > t_0$.
Majorante / Minorante	$\int_a^{\rightarrow\infty} g\, dx$ konv, $\int_a^{\rightarrow\infty} h\, dx$ div, $\lvert f \rvert \le g$: Abs. konv. $h \le \lvert f \rvert$ div.
Integralkriterium	f positiv, monoton fallend.
Bezug L-Integral, Uneigentliches Integral	Absolute Konvergenz.
L^p-Räume	$\lvert f \rvert^p \in L$. Linearer Raum
	HÖLDERsche Ungleichung
	MINKOWSKIsche Ungleichung
	CSU
	Norm, Halbnorm, Vereinbarung
	CAUCHY-Konvergenz
R^p als normierter linearer Raum	Eigenschaften des Innenproduktes (Linearität, CSU)
	Konvergenzsätze
Normen	Abschätzung durch 1-Norm
	Normen äquivalent auf R^P.

Bolzano-Weierstrass	Beschränkt => Konvergente Teilfolge => Häufungspunkt Unendliche, beschränkte Menge => Min. ein Häufungspunkt
S-Offenheit	$\exists\ \varepsilon>0,\ U_\varepsilon(x) \cap S \subset O$, $\exists$ offenes G mit $O = G \cap S$
Stetigkeit im R^p	$\|Ax-Ax_0\| \to 0$, Folgenkriterium, Urbild jeder offenen Menge ist S-offen
BANACHscher Fixpunktsatz	Kontrahierende Selbstabbildung, genau ein Fixpunkt. Folge x_n!
Beschränktheit von linearen Abbildungen	$\|Ax\| \le k\ \|x\|$ => LIPSCHITZ => glm. stetig <=> A stetig (Indirekt, $y_n:=1/n \cdot x_n/\|x_n\|$, Wid. zur Stetigkeit)
Abbildungsnorm	$\inf\{\ k>0, \|Ax\|\le k\|x\|\} = \sup\{\ \|Ax\|,\ \|x\|\le 1\} = \sup\{\|Ax\|/\|x\|, x\neq 0\}$
Stetige Fkt. $R^p \to R^q$	Stetigkeit <=> Komponentenfkt. Stetigkeit (Maximumsnorm) Partielle Stetigkeit bzgl. Veränderlichen **nicht** hinreichend! Jede lin. Abb. stetig (Einheitsvektoren aus Norm ziehen)
Partielle Ableitungen	SCHWARZ, C^2 notwendig.
Änderungsverhalten von C^1-Fkt.	Inkrement aufstellen, jeweils eine Komponente ändern.
Kettenregel	$(fog)'=f\,'(g(x))\cdot g'(x)$. Inkrement betrachten!
Produktregel	$F(y_1,y_2)=y_1y_2$, $G(x)=(f(x), g(x))$.
Richtungsableitung	$D_\nu f(x) = f\,'(x)\ \nu = \nu$ grad $f(x)$ $\|D_\nu f(x)\| \le \|\text{grad } f(x)\|_2\ \|\nu\|_2 = \|\text{grad } f(x)\|_2$ nach CSU
Mittelwertsatz für reellwertige Fkt.	$f(x+h)-f(x) = f\,'(x+\delta h) \cdot h$
Mittelwertsatz für vektorwertige Fkt.	$f(x+h)-f(x) = (\int_0^1 f\,'\,(x+th)dt) \cdot h$
TAYLOR	$f(x+h)=f(x) + \Sigma_{i=1}^n\ 1/i!\ (h_1D_1 + \ldots + h_pD_p)^i\ f(x) + 1/(n+1)!\ldots$
Implizite Funktionen	$G\times H \to R^q$, C^1-Fkt., $\det(D_xF(x,y))\neq 0 \Rightarrow f\,'(a) = -(D_xF)^{-1} \cdot (D_yF)$